Analysis 2

17.05.2018

Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder

Abgabe: 28.05.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **1 + 4 + 5 = 10 Punkte**

Es notiere wie üblich $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ die $(n\times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen und $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ diejenige Abbildung, die jeder Matrix $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ihre Determinante $\det(A)$ zuordnet.

(a) Begründen Sie, dass det total differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie – etwa unter Zuhilfenahme der Leibnizschen Entwicklungsformel – dass die totale Ableitung der Determinante in der Einheitsmatrix E gegeben ist durch die lineare Abbildung

$$(\mathrm{D}\det)(E)\colon h\mapsto \mathrm{Spur}(h),\qquad h\in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Hierbei ist für eine Matrix $h=(h_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ihre Spur durch $\mathrm{Spur}(h):=\sum_{i=1}^n h_{ii}$ gegeben.

(c) Schlussfolgern Sie letztlich durch Modifikation der Argumente aus (a), dass die totale Ableitung der Determinante an einer *invertierbaren Matrix* $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gegeben ist durch die lineare Abbildung

$$(\mathrm{D}\det)(A)\colon h\mapsto \det(A)\mathrm{Spur}(A^{-1}h),\qquad h\in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2: **4 + 6 = 10 Punkte**

Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen. Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon U\to\mathbb{R}$ definieren wir den *Laplace-Operator* Δf durch

$$\Delta f:=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}f.$$

(a) Seien $f,g\colon U\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Finden Sie mit Beweis eine Formel für $\Delta(fg)$, die nur $f,g,\Delta f,\Delta g$ sowie die Gradienten von f und g enthält.

(b) Sei nun $n=2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x):=\log(|x|)$ *harmonisch* ist, d.h., $\Delta f=0$ erfüllt.

Aufgabe 3: **2 + 6 + 2 = 10 Punkte**

Es sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y):=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f total differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, $\partial_x\partial_y f(0,0)$ und $\partial_y\partial_x f(0,0)$ existieren, jedoch nicht übereinstimmen.

(c) Wie lässt sich das Ergebnis aus (c) mit dem Satz von Schwarz in Einklang bringen?

Aufgabe 4: **5 + 5 = 10 Punkte**

Es seien $f\colon K \to \mathbb{R}$ sowie $g\colon J \to \mathbb{R}$ gegeben durch

(a) $f(x,y) := 4x^2 - 3xy$, wobei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$ ist.

(b) $g(x,y) := x^2 + 2y^2$, wobei $J := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x, y \leq 1,\ |x| + |y| \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 \leq x, y \leq 0,\ |x| + |y| \leq 2\}$ ist.

Zeigen Sie, dass sowohl f auf K als auch g auf J ihre jeweiligen Maxima bzw. Minima annehmen und bestimmen Sie diese. Wo werden diese jeweils angenommen?
