S2B1 HAUPTSEMINAR FUNKTIONALANALYSIS – FOURIER MULTIPLIERS UND PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

JONAS JANSEN AND OLLI SAARI

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, dann ist die Fouriertransformation von f gegeben durch

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Kennt man die Fouriertransformation $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$, so kann die Funktion mit der inversen Fouriertransformation rekonstruiert werden

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Während das Zusammenspiel von f und Differentialoperatoren wie dem Laplace-Operator $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial_k^2$ sehr implizit sein kann, weiß man sehr genau wie die Ableitungen und Stammfunktionen von den ebenen Wellen $e^{ix\cdot\xi}$ aussehen. Das Ableiten bezüglich x_k ist dann ganz einfach eine Multiplikation mit der Wellenzahl $i\xi_k$. Konkret bedeutet das zum Beispiel, dass

$$-\Delta f(x) = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^2 \hat{f}](x).$$

Wir haben also die Anwendung eines Differentialoperators in den dreischrittigen Prozess Anwendung der Fouriertransformation, Multiplikation mit einem Polynom und Anwendung der inversen Fouriertransformation zerlegt. Daher bietet die Fouriertransformation ein vielfältiges Werkzeug, um Differentialoperatoren zu studieren. Aber wir können noch einen Schritt weitergehen und das Polynom $|\xi|^2 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2$, das man auch das Fourier-Symbol des Differentialoperators $-\Delta$ nennt, durch allgemeinere Funktionen $p(x,\xi)$ ersetzen. Solche Operatoren heißen Pseudodifferentialoperatoren und sind wichtige Operatoren in vielen Bereichen der Analysis.

Eine physikalische Anwendung ist die Potentialgleichung

$$\operatorname{div} A(x)\nabla u(x) = f(x)$$

in n Veränderlichen. Wegen der nichtkonstanten Konduktivitätmatrix A ist dieser Differentialoperator $\operatorname{div} A(x)\nabla$ ein Beispiel eines Pseudodifferentialoperator. Möchte man an Informationen über Lösungen u der Gleichung und ihres Gradienten ∇u gelangen, so kann man dafür die in diesem Seminar entwickelte Theorie verwenden. Wir werden Bedingungen an Fourier-Symbole kennenlernen, mit denen Aussagen, wie beispielsweise $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ impliziert, dass $\partial_{x_j}\partial_{x_k} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, bewiesen werden können.

In diesem Seminar machen wir uns mit den Grundzügen der Theorie bekannt. Wir starten mit den grundlegenden Eigenschaften der Fouriertransformation und decken dann fundamentale Sätze über Fourier-Multiplikatoren und Pseudodifferentialoperatoren ab. Ein grundlegendes Tool sind so genannte singuläre Integraloperatoren. Schließlich werden wir Anwendungen zu Funktionenräumen und auf partielle Differentialgleichungen diskutieren.

Voraussetzungen: Analysis III. Die Vorlesungen Einführung in die partiellen Differentialgleichungen und komplexe Analysis sind hingegen keine Voraussetzungen.

Literatur

[1] H. Abels, *Pseudodifferential and Singular Integral Operators*, De Gruyter 2011, available as an eBook through our library.