Prof. Dr. Michael Rapoport **WS 2006/07**
Dr. Ulrich Görtz

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 14, Vorträge am 7.12.2006

Aufgabe 35

Sei k ein Körper und G ein affines Gruppenschema von endlichem Typ über k. Dann existieren $N \geq 0$ und eine Einbettung $i : G \longrightarrow GL_N$ existieren, so dass G durch i mit einer abgeschlossenen Untergruppe von GL_N identifiziert wird. Beweise dies im Fall, dass G reduziert ist (siehe [Bo] Prop. 1.10).

Aufgabe 36

Sei k ein Körper. Realisiere die Gruppe $G = PGL_{n,k}$ als abgeschlossene Untergruppe von GL_N, für geeignetes N.

Aufgabe 37

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine affine algebraische Gruppe über k (d. h. ein reduziertes affines Gruppenschema von endlichem Typ über k).

a) Sei V eine nicht-leere algebraische Varietät, auf der G operiert. Zeige, dass die Bahnen der G-Operation in V lokal abgeschlossene glatte Untervarietäten von V sind, und dass der Abschluss einer Bahn stets die Vereinigung dieser Bahn und weiterer Bahnen kleinerer Dimension ist. Folgere, dass zumindest eine abgeschlossene Bahn existiert.

b) Gib jeweils ein Beispiel der obigen Situation, in dem die Anzahl der Bahnen endlich bzw. unendlich ist.

Aufgabe 38 (Jordan-Zerlegung)

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Erinnere an die additive Jordan-Zerlegung eines Endomorphismus und an die multiplikative Jordan-Zerlegung eines Automorphismus von V.

b) Sei G eine affine algebraische Gruppe über k. Sei $G \longrightarrow GL_N$ eine abgeschlossene Einbettung, die G mit einer Untergruppe von GL_N identifiziert. Zeige, dass man auf diese Weise eine multiplikative Jordan-Zerlegung von Elementen in G erhält, die nicht von der Wahl der Einbettung abhängt. Zeige, dass jeder Homomorphismus $G \longrightarrow G'$ von affinen algebraischen Gruppen die Jordan-Zerlegung erhält.

Siehe [Sp] 2.4, insbes. Theorem 2.4.8.

Literatur

[Bo] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Springer GTM 126.

[Sp] T. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser Progr. in Math. 9.