Einführung in die PDGs

03.05.2019

Prof. Dr. H. Koch

Dr. F. Gmeineder

Abgabe: 10.05.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: **5 + 5 = 10 Punkte**

Wir sagen, dass eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ die äußere Ballbedingung in $x_* \in \partial\Omega$ erfüllt genau dann, wenn $y \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ existieren mit $\overline{\mathrm{B}_r(y)} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer beschränkten Menge Ω mit C^1-Rand, so dass diese Bedingung für einen Randpunkt nicht erfüllt ist.

Wir sagen weiters, dass der Punkt $x_* \in \partial\Omega$ die äußere Kegelbedingung erfüllt, falls ein offener Ball $\mathrm{B}_r(y)$ existiert, sodass

$$\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{B}_r(y) \cup \{x_*\})} \cap \overline{\Omega} = \{x_*\}$$

gilt, wobei conv die konvexe Hülle bezeichne.

(b) Zeigen Sie, dass für Mengen Ω mit C^1-Rand die äußere Kegelbedingung in jedem Randpunkt erfüllt ist.

Aufgabe 2: **5 + 5 = 10 Punkte**

Es sei $u \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d)$ subharmonisch und beschränkt.

(a) Sei $d = 2$. Zeigen Sie, dass u konstant ist. Nützen Sie hierfür die Harmonizität von $x \mapsto a + b\log(|x|)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Schlussfolgerung für $d \geq 3$ im Allgemeinen falsch ist: Es gibt also für $d \geq 3$ subharmonische, beschränkte aber nicht-konstante Funktionen.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $g\colon \partial\mathrm{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie die Lösbarkeit des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \mathrm{B}_1(0), \\ u = g & \text{auf } \partial\mathrm{B}_1(0), \end{cases}$$

indem Sie wie folgt vorgehen:

(a) Approximieren Sie das stetige Randdatum in der Supremumsnorm durch Polynome – nützen Sie dafür den Satz von Weierstraß.

(b) Approximieren Sie die in (a) erhaltenen Polynome geeignet durch harmonische Polynome.

(c) Gehen Sie nun insgesamt zur Grenze über und zeigen Sie die Existenz einer Lösung $u \in \mathrm{C}^2(\mathrm{B}_1(0)) \cap \mathrm{C}(\overline{\mathrm{B}_1(0)})$ zu dem obigen Randwertproblem.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Sei $d \geq 2$. Bestimmen Sie mit Beweis ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_{\mathbb{R}^d} |D^2 u|^2 \, \mathrm{d}x = a \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta u|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in \mathrm{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ gilt. Nützen Sie hierfür partielle Integration.