Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 1
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Betrachte die Teilmengen $A := \{1, 2\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4\}$ der natürlichen Zahlen.

(a) Wie viele Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ gibt es?

(b) Beschreibe alle injektiven Abbildungen $f : A \longrightarrow B$.

(c) Gibt es eine surjektive Abbildung $f : A \times A \longrightarrow B$?

(d) Gibt es eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$, sodass für jede injektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$, die Komposition $g \circ f : A \longrightarrow A$ injektiv ist?

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen M und N. Seien weiterhin $A, B \subset N$ Teilmengen von N.

(a) Zeige dass $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ gilt.

(b) Zeige dass $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ gilt.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Fibonacci-Folge mit Anfangswerten*
Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Lösungsformel für die Fibonacci-Folge mit bestimmten Anfangswerten herzuleiten.

(a) Wir betrachten zuerst die Rekursion

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \tag{1}$$

ohne festgelegte Anfangswerte.

(i) Finde alle reelen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, sodass der Lösungsansatz $f_n = x^n$ Rekursion (1) für alle $n \geq 2$ erfüllt.

(ii) Falls $(f_n)_{n\geq 0}$ und $(g_n)_{n\geq 0}$ Folgen sind, welche Rekursion (1) erfüllen, so zeige man, dass für beliebige reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, die Folge $(h_n)_{n\geq 0}$ mit $h_n := a \cdot f_n + b \cdot g_n$ ebenfalls Rekursion (1) erfüllt.

(b) Benutze Teil (a) der Aufgabe, um eine Lösungsformel für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\geq 0}$ mit $f_0 = 2016$, $f_1 = 1008$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 2$ zu finden.

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 28. Oktober 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Bei der folgenden Aufgabe sollen Sie Ihre Anschauung trainieren – Sie dürfen deshalb auch anschaulich und zum Beispiel mit Bildern oder Skizzen argumentieren.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks*
Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die entweder einer Rotation um den Ursprung, oder einer Spiegelung entlang einer Ursprungsgeraden entsprechen.

Betrachte nun ein gleichseitiges Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, dessen Schwerpunkt dem Ursprung von $\mathbb{R}^2$ entspricht. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ die Teilmenge derjenigen Abbildungen $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, d.h. $\phi(\Delta) = \Delta$.

(a) Beschreibe alle Elemente von $\mathcal{S}$. Wie viele sind es?

(b) Bestimme die Untermenge $X \subset \mathbb{R}^2$ derjenigen Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, sodass die Teilmenge $\{\phi(x) \mid \phi \in \mathcal{S}\}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{S}$ gleichmächtig sind.

Allgemeine Bemerkungen:

- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.