Über die Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen und die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Triantafyllos Xylouris

aus

Bonn

Bonn, 2011

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Erstgutachter: PD Dr. B. Z. Moroz
Zweitgutachter: Prof. Dr. J. Franke

Tag der Promotion: 16. November 2011

Erscheinungsjahr: 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zusammenfassung

Seien a und q teilerfremde, positive natürliche Zahlen. Linnik bewies 1944, dass die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression a modulo q kleiner als Cq^L mit positiven effektiv berechenbaren Konstanten C und L ist. Der Beweis basiert auf Abschätzungen für nullstellenfreie Regionen und Abschätzungen für die Anzahl der Nullstellen von Dirichletschen L-Funktionen in der Nähe des Punktes $s = 1$.

Linnik selbst gab keinen konkreten Wert für L an. Dies folgte später durch verschiedene Autoren. Zuletzt bewies Heath-Brown 1992, dass $L = 5.5$ zulässig ist. Im selben Artikel erwähnt er verschiedene Verbesserungspotentiale für seine Arbeit. Basierend auf diesen Ausführungen verbessern wir die entsprechenden Abschätzungen für die Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen und zeigen schließlich, dass $L = 5$ zulässig ist.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgeteilt. In Kapitel 2 geben wir eine Einführung in die Thematik und fassen unsere Ergebnisse zusammen. In Kapitel 3 stellen wir einige Resultate von Heath-Brown zusammen, die wir benötigen werden. Mit Hinblick auf die spätere Anwendung fügen wir dabei an manchen Stellen kleine Variationen und Verallgemeinerungen ein. In Kapitel 4 verbessern wir Abschätzungen für Regionen nahe $s = 1$, in denen die Dirichletschen L-Funktionen keine bzw. nur eine sehr begrenzte Anzahl an Nullstellen haben. In Kapitel 5 verbessern wir die Abschätzungen für die Anzahl von Dirichletschen L-Funktionen, die eine Nullstelle in der Nähe von $s = 1$ haben. In Kapitel 6 benutzen wir die Ergebnisse aus den Kapiteln 4 und 5, um die Zulässigkeit von $L = 5$ zu beweisen. Außerdem geben wir dort eine quantitative Version des Linnikschen Theorems an. Schließlich sprechen wir in Kapitel 7 kurz gewisse Potentiale an, die wir nicht verwendet haben, da sie gemäß unserem Vorgehen nur sehr geringfügige Verbesserungen liefern.

Kapitel 2

Einführung

2.1 Notationen

Es werden die folgenden Notationen benutzt, welche in der analytischen Zahlentheorie üblich sind. Seien dazu $x \in \mathbb{R}$ und m, n, a, $q \in \mathbb{N}$.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge $a + q\mathbb{Z} = \{a + qj \mid j \in \mathbb{Z}\}$ nennen wir arithmetische Progression a modulo q bzw. $a \pmod q$. Wir interessieren uns nur für die positiven Werte dieser Menge, lassen aber trotzdem das j durch $\mathbb{Z}$ laufen, um nicht $a \le q$ dazuschreiben zu müssen.
- Die Menge der Primzahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$. p bzw. p_i steht immer für eine Primzahl.
- Wir benutzen die *von Mangoldt-Funktion*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^m \text{ für ein } p \in \mathbb{P} \text{ und ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x wird mit

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$$

  bezeichnet. Die Anzahl der Primzahlen in einer arithmetischen Progression bezeichnen wir mit

$$\pi(x; q, a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \pmod q}} 1.$$

- Wir benutzen die Bezeichnung

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \quad \left(= \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)\right).$$

- Wir setzen $(m, n) = \mathrm{ggT}(m, n) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid d|m \text{ und } d|n\}$ und $[m, n] = \mathrm{kgV}(m, n) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid m|d \text{ und } n|d\}$. Es wird keine Gefahr der Verwechslung mit einem Intervall bestehen.

- $\varphi(q)$ bezeichnet die *Eulersche φ-Funktion*.

- $\mu(d)$ bezeichnet die *Möbiussche μ-Funktion*.

- $x = [x] + \{x\}$ mit $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

- Schreiben wir für ein $s \in \mathbb{C}$, dass $s = \sigma + it$, so gilt die stille Vereinbarung, dass $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $\Re\{s\} = \sigma$ und $\Im\{s\} = t$. Außerdem werden wir den Ausdruck „ρ sei komplex" als Synonym verwenden für $\rho \notin \mathbb{R}$.

- Seien $X \subset \mathbb{C}$ und $g : X \to \mathbb{C}$, $f : X \to [0, \infty)$ Funktionen. Dann schreiben wir $g(x) = O(f(x))$ bzw. gleichbedeutend $g(x) \ll f(x)$ (auch $f(x) \gg g(x)$), falls $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in X : |g(x)| \leq Cf(x)$. Dabei wird X in der Regel aus dem Kontext ersichtlich sein. Die Konstante C nennen wir auch implizite Konstante. Meist werden die Funktionen g und f von verschiedenen Parametern abhängen. Dann hängt die implizite Konstante in der Regel auch von diesen Parametern ab. Manchmal werden wir dies durch die Schreibweise $O_A(f(x))$ bzw. $\ll_A f(x)$ kennzeichnen, was bedeutet, dass C von A abhängt. Wenn außerdem nichts Gegenteiliges gesagt wird, dann wird eine solche implizite Konstante stets effektiv berechenbar sein. Weiterhin schreiben wir $g(x) = o(f(x))$, falls $\frac{g(x)}{f(x)} \to 0$ für $x \to \infty$.

- Wir benutzen oft die folgenden Abkürzungen für $x,y > 0 : \log^y x = (\log x)^y$ und $\log xy = \log(xy)$.

- χ steht für einen Dirichlet-Charakter $\pmod q$ und χ_0 für den Hauptcharakter $\pmod q$. Unter einer Dirichletschen L-Funktion verstehen wir die meromorphe Funktion $s \mapsto L(s, \chi)$, die für $\Re\{s\} > 1$ die Gleichung
$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$
erfüllt. Mit $\operatorname{ord} \chi$ bezeichnen wir die Ordnung des Charakters χ in der Gruppe der Dirichlet-Charaktere $\pmod q$. Ist $\operatorname{ord} \chi = 2$, also $\chi(n)$ reellwertig, dann nennen wir χ einen reellen Charakter. Ist $\operatorname{ord} \chi \geq 3$, so nennen wir χ einen komplexen Charakter.

- Möchten wir betonen, dass eine Definition stattgefunden hat, so benutzen wir das Zeichen „:=" bzw. „=:" auf die übliche Art und Weise.

- Summieren wir über die Nullstellen einer Funktion $f(s)$ oder zählen wir die Anzahl dieser Nullstellen in einer speziellen Region, so werden diese stets mit ihrer Vielfachheit berücksichtigt.

Zusätzlich gelten die folgenden Vereinbarungen:

- Wir benutzen die Abkürzung $\mathscr{L} = \log q$.

- ε steht immer für eine positive, reelle Konstante. Der Wert dieser Konstanten muss keineswegs immer gleich sein und kann von Zeile zu Zeile variieren.

- Wir beweisen die meisten Resultate nur unter der Bedingung $q \geq q_0$, wobei q_0 jeweils eine hinreichend große Konstante ist. Das werden wir nicht immer explizit erwähnen.

Schließlich geben wir hier einige ausgewählte Bezeichnungen an, die wir im Laufe der Arbeit definieren und benutzen werden:

- $P(q)$ (S.9),
- $N(\sigma, T, \chi)$ (S.11),
- $N(\lambda)$ (S.13),
- $K(s, \chi)$ (S.17),
- $\phi = \phi(\chi)$, Bedingung 1, Bedingung 2, Laplace-Transformierte F von f (S.17f),
- R, $R(x)$, $l = l(q)$ (S.18),
- χ_j, ρ_j, β_j, γ_j, λ_j, μ_j, ρ', β', γ', λ', μ' (S.21),
- $f(t)$, $F(z)$ (S.23),
- θ_d, $\psi_d^{U,V}$ (S.28),
- $\sum_\rho{}'$ (S.35),
- $A(s_1, s_2, t)$, A_{sup} (S.29),
- $K_0(s, \chi)$ (S.41),
- Tabellen 2-3 (S.45), Tabellen 4-10 (S.52-55), Tabelle 11 (S.60), Tabelle 2' (S.62).

2.2 Einführung in die Thematik

Im Folgenden seien immer $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$. Dirichlet bewies 1837, dass die arithmetische Progression $\{a + jq \mid j \in \mathbb{Z}\}$ unendlich viele Primzahlen enthält[1]. Dies wurde später durch den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen präzisiert (de la Vallée-Poussin, 1896). Dieser besagt, dass für festes q

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x; q, a)}{\operatorname{li}(x)/\varphi(q)} = 1 \tag{2.1}$$

gilt. Insbesondere sind für festes q und hinreichend großes x die Primzahlen in den $\varphi(q)$ verschiedenen Restklassen $a \pmod q$ im Wesentlichen gleichverteilt.

Viel Interesse hat die Frage erzeugt, inwiefern die Konvergenz in (2.1) gleichmäßig in q ist. Anders formuliert: Wie groß muss $x_0(q)$ gewählt werden, damit für beliebiges q und $x \geq x_0(q)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leq x$ innerhalb der $\phi(q)$ verschiedenen Restklassen $a \pmod q$ gleichverteilt[2] ist?

Unter der Bedingung $x \geq q$ kann (2.1) offensichtlich nicht gelten, da $\pi(q; q, a) \in \{0, 1\}$. Deutlich tiefliegender ist der Beweis, dass für leicht kleineres q, nämlich unter der Bedingung

[1] Ist $(a, q) > 1$, so enthält die entsprechende arithmetische Progression höchstens eine Primzahl.

[2] Eine präzisere Formulierung für den verwendeten Ausdruck „gleichverteilt“ wäre: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $q_0 = q_0(\varepsilon)$, so dass für alle $q \geq q_0$ und $x \geq x_0(q)$ gilt:

$$(1 - \varepsilon) \operatorname{li}(x)/\varphi(q) \leq \pi(x; q, a) \leq (1 + \varepsilon) \operatorname{li}(x)/\varphi(q).$$

Beachte dabei, dass $\operatorname{li}(x)/\varphi(q)$ unabhängig von a ist, deswegen Gleichverteilung.

$x \geq q \log^A q$ $(A > 0)$, die Aussage (2.1) ebenfalls nicht gelten kann [12]. Ist jedoch $x \gg_\varepsilon e^{(q^\varepsilon)}$ $(\varepsilon > 0)$, so ist die Aussage des Siegel-Walfisz Theorems (1936) nicht-trivial: Für $x \geq 2$ und $A > 1$ gilt [32, Korollar 11.21]

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O_A\left(\frac{x}{\log^A x}\right), \tag{2.2}$$

wobei die implizite Konstante von A abhängt und nicht effektiv berechenbar ist. Ist $x \gg_\varepsilon e^{(q^\varepsilon)}$ und A groß genug, dann ist der Hauptterm von größerer Ordnung als der Restterm und es folgt die Aussage (2.1), bzw. die gewünschte Gleichverteilung.

Unter Verwendung der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung für die Dirichletschen L-Funktionen folgt noch mehr, nämlich für $x \geq 2$ [32, S.426]

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O(x^{\frac{1}{2}} \log x). \tag{2.3}$$

Das liefert Gleichverteilung ab $x \gg_\varepsilon q^{2+\varepsilon}$. Letztendlich wird vermutet, dass für $x \geq q$ (vergleiche [32, Korollar 13.8], [1, S.1])

$$\pi(x; q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q^{-\frac{1}{2}}), \tag{2.4}$$

was Gleichverteilung ab $x \gg_\varepsilon q^{1+\varepsilon}$ liefert.

Verwandt mit der Frage, ab wann in den obigen Gleichungen der Hauptterm von größerer Ordnung ist als der Restterm, ist die Frage wie groß die *erste* Primzahl in einer arithmetischen Progression ist. Mit anderen Worten: Wie groß muss x in Abhängigkeit von q gewählt werden, damit für alle a mit $(a, q) = 1$ gilt, dass $\pi(x; q, a) > 0$? Wir interessieren uns also für die Größenordnung von

$$P(q) = \min\{p \in \mathbb{P} \mid \pi(p; q, a) > 0 \text{ für } 1 \leq a \leq q,\ (a, q) = 1\}.$$

Eine untere Schranke bekommt man sofort aus der Ungleichung

$$\pi(P(q)) \geq \varphi(q).$$

Daraus folgt für $q \to \infty$, dass

$$P(q) \geq (1 + o(1))\varphi(q) \log q, \tag{2.5}$$

da man sonst einen Widerspruch zum Primzahlsatz bekäme[3]. Weiterhin ist gezeigt worden, dass es unendlich viele q gibt mit [18]

$$P(q) \gg \varphi(q) \log q \frac{(\log\log q)(\log\log\log\log q)}{(\log\log\log q)^2}.$$

Diese untere Abschätzung ist bereits recht nah an der vermuteten tatsächlichen Größe von $P(q)$, nämlich (vergleiche beispielsweise [40])

$$P(q) \approx \varphi(q) \log^2 q.$$

[3]Wir erinnern daran, dass [20, Theorem 328]

$$\frac{n}{\log\log n} \ll \varphi(n) \leq n.$$

Was obere Schranken betrifft, so liefert (2.2) sofort $\pi(x; q, a) > 0$ für $x \gg_\varepsilon e^{(q^\varepsilon)}$ unabhängig von a, also

$$P(q) \ll_\varepsilon e^{(q^\varepsilon)}.$$

Wird die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung für die Dirichletschen L-Funktionen vorausgesetzt, bzw. (2.3), so folgt

$$P(q) \ll_\varepsilon q^{2+\varepsilon}.$$

Aus der Vermutung (2.4) folgt schließlich

$$P(q) \ll_\varepsilon q^{1+\varepsilon}.$$

Vor diesem Hintergrund ist nun das folgende Ergebnis von Linnik aus dem Jahr 1944 ([29], [30]) recht bemerkenswert, nämlich

$$P(q) \le Cq^L \tag{2.6}$$

mit effektiv berechenbaren positiven Konstanten C und L. Die nicht eindeutige Zahl L, die hier auftaucht, wird manchmal auch „Linniksche Konstante“ genannt. Wir werden in dieser Arbeit das Resultat (2.6) auch als „Linniksches Theorem“ bezeichnen. Linnik selbst gab keinen konkreten zulässigen Wert für L an. Pan holte dies 1957 nach. Der zulässige Wert für L wurde seitdem mehrmals verbessert. Es folgt eine Liste von bisher bewiesenen Verbesserungen.

Tabelle 1. Zulässige Werte für L

L	Jahr	Autor(en)	Referenz
10000	1957	Pan	[37]
5448	1958	Pan	[38]
777	1965	Chen	[4]
630	1971	Jutila	[39, S.370]
550	1970	Jutila	[27]
168	1977	Chen	[5]
80	1977	Jutila	[28]
36	1977	Graham	[15]
20	1981	Graham	[17]
17	1979	Chen	[6]
16	1986	Wang	[41]
13.5	1989	Chen und Liu	[7]
11.5	1991	Chen und Liu	[8]
8	1991	Wang	[42]
5.5	1992	Heath-Brown	[23]

Bekanntlich hängt die Verteilung der Primzahlen eng mit der Lage der Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion zusammen. Analog gibt es einen engen Zusammenhang zwischen den Primzahlen in einer arithmetischen Progression $a \pmod q$ und den Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen $\pmod q$. Speziell basieren die Beweise des Linnikschen Theorems meist auf den folgenden drei Prinzipien.

Prinzip 1 („Nullstellenfreie Region“). Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante $c_1 > 0$, so dass die Funktion

$$\prod_{\chi \pmod q} L(s, \chi) \tag{2.7}$$

höchstens eine Nullstelle in der Region

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log q(2+|t|)}$$

hat (es wurde die Schreibweise $\log q(2+|t|) = \log(q(2+|t|))$ verwendet). Wenn diese Ausnahmenullstelle - auch „Siegel-Nullstelle“ oder „Siegel-Landau-Nullstelle“ oder „exzeptionelle Nullstelle“ genannt - existiert, dann ist sie reell, einfach und gehört zu einem reellen Charakter $\chi \neq \chi_0$.

Prinzip 2 („Deuring-Heilbronn Phänomen“). Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante $c_2 > 0$, so dass, wenn die Ausnahmenullstelle in Prinzip 1 existiert und gleich $1 - \lambda_1(\log q)^{-1}$ ist, dann die Funktion aus (2.7) keine weiteren Nullstellen in der Region

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_2 \log(\lambda_1^{-1})}{\log q(2+|t|)}$$

hat. Dieses Phänomen wird auch als „Nullstellen-Abstoßung“ bezeichnet, weil die Existenz einer Ausnahmenullstelle nah bei $s=1$ erzwingt, dass alle weiteren Nullstellen viel weiter links von $s=1$ liegen müssen. Letztere werden sozusagen „abgestoßen“.

Prinzip 3 („Log-Freie Abschätzung der Nullstellendichte“). Es gibt zwei effektiv berechenbare Konstanten $c_3, c_4 > 0$, so dass für $T \geq 1$ und $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ gilt:

$$\sum_{\chi \pmod q} N(\sigma, T, \chi) \leq c_3 (qT)^{c_4(1-\sigma)}.$$

Dabei ist

$$N(\sigma, T, \chi) = \#\{\rho \in \mathbb{C} \mid L(\rho, \chi) = 0,\, \Re\{\rho\} \geq \sigma,\, |\Im\{\rho\}| \leq T\},$$

wobei die Nullstellen mit Vielfachheit gezählt werden.

Der Wert der Konstanten L, für die man das Theorem von Linnik beweisen kann, hängt direkt von den Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4 ab. Dabei ist es durchaus möglich und später auch der Fall, dass zu obigen Prinzipien verwandte Theoreme zu Verbesserungen für die zulässige Konstante L führen. Ein solches verwandtes Theorem wäre z.B. der Nachweis einer bis auf zwei Nullstellen nullstellenfreien Region. Für Beweise des Linnikschen Theorems, die teilweise oder ganz auf die Verwendung von Theoremen zu den Nullstellen verzichten, siehe [34], [9], [11] und [19].

Unter bestimmten Voraussetzungen kann der zulässige Wert für L verbessert werden. Seien c_1 und λ_1 so definiert wie in Prinzip 1 und 2. Existiert die Ausnahmenullstelle $\rho_1 = 1 - \lambda_1 \mathscr{L}^{-1}$ und ist $\lambda_1 \leq \lambda(\varepsilon)$ für ein hinreichend kleines $\lambda(\varepsilon) > 0$, so ist

$$L = 3 + \varepsilon$$

zulässig bzw. sogar $L = 2 + \varepsilon$, falls die effektiv berechenbare implizite Konstante aus dem Theorem durch eine nicht effektiv berechenbare ersetzt wird (Heath-Brown, [22]). Gilt Prinzip 1 für beliebig großes c_1 (und ab $q \geq q_0(c_1)$) und existiert die Ausnahmenullstelle nicht, so folgt durch Standardargumente

$$L = 2.4 + \varepsilon.$$

Den gleichen Wert für L erhält Iwaniec [25] für jene q, deren Primteiler aus einer festen endlichen Menge stammen. Schließlich erinnern wir noch einmal an die weiter oben erwähnte Aussage, dass unter der Voraussetzung der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung für die Dirichletschen L-Funktionen

$$L = 2 + \varepsilon$$

folgt. In diesem Zusammenhang ist ein Ergebnis von Friedlander und Iwaniec bemerkenswert. Unter der Voraussetzung der Existenz der Ausnahmenullstelle und gewissen Voraussetzungen an selbige beweisen sie die Konstante [10, Korollar 3.2]

$$L = 1.983\ldots < 2.$$

Interessiert man sich für die Gültigkeit des Linnikschen Theorems „im Durchschnitt“, so kann das Bombieri-Vinogradov Theorem [3, Satz 6.2.2] verwendet werden, welches für Durchschnittsbetrachtungen über alle $q \leq Q$ einen guten Ersatz darstellt zur Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung. Aus letzterem Theorem folgt in der Tat, dass $P(q) \leq Cq^{2+\varepsilon}$ für ein $C > 0$ und fast alle q in dem Sinne, dass - gegeben $Q \in \mathbb{N}$ - die Ungleichung für alle $q \leq Q$ gilt mit höchstens $O_\varepsilon(Q/\log\log Q)$ Ausnahmen.

2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die letzte Verbesserung auf $L = 5.5$ wurde durch Heath-Brown im Jahr 1992 bewiesen. Im besagten Artikel werden am Ende neun Potentiale angegeben, mit denen die Argumente des Artikels verbessert werden können. In der Diplomarbeit des Autors [43] wurden diese Potentiale behandelt und die Zulässigkeit von $L = 5.2$ bewiesen. In [44], welches im Wesentlichen eine Kurzfassung von [43] ist, zeigen wir, dass $L = 5.18$ zulässig ist. Die vorliegende Arbeit, welche die beiden letzteren enthält, beinhaltet eine weitere Verbesserung beim Beweis oberer Abschätzungen von $N(\lambda)$ für kleine λ (siehe §5.2 und §6.3), sowie zwei zusätzliche Ansätze (siehe §5.1 und §6.1) und ein paar Erweiterungen (siehe die Tabellen 2', 9 und 10, sowie §6.5). Unser Hauptresultat ist

Theorem 2.1. *Es gilt*

$$P(q) \ll q^5$$

mit einer effektiv berechenbaren impliziten Konstanten.

Die bestmögliche Konstante, die wir ohne Zusatzaufwand erreichen könnten, ist dabei nicht die „glatte“ Zahl $L = 5$, sondern eine Zahl knapp unterhalb von 5. Außerdem weisen wir darauf hin, dass man die Anzahl der Computerberechnungen in dieser Arbeit hätte exzessiv erhöhen können. Ließe man die Rechenzeit gegen unendlich gehen, so vermuten wir, dass man $L = 4.96$ beweisen könnte. Die Argumentation, welche zu Theorem 2.1 führt, liefert eigentlich noch mehr.

Theorem 2.2. ***a)*** *Es gibt eine nicht effektiv berechenbare Konstante q_0, so dass für $q \geq q_0$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ die arithmetische Progression $a + q\mathbb{Z}$ mindestens*

$$q^{3.21}$$

Primzahlen $p \leq q^5$ enthält.

b) *Sei $\lambda > 0$ beliebig. Angenommen, die Funktion aus (2.7) hat keine reellen Nullstellen ρ mit $\rho \geq 1 - \lambda/\log q$. Dann gibt es zwei effektiv berechenbare positive Konstanten $q_0 = q_0(\lambda)$ und $C = C(\lambda)$, so dass für $q \geq q_0$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ es ein $t_0 = t_0(a, q) \in [q^{4.22}, q^5]$ gibt mit*

$$\pi(t_0; q, a) \geq C \frac{t_0}{\varphi(q) \log t_0}. \tag{2.8}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen besagt also b), dass es für ein $t_0 \in [q^{4.22}, q^5]$ und bis auf einen beschränkten und von q unabhängigen Faktor C genau so viele Primzahlen in der Menge

$$[1, q^{t_0}] \ \cap \ a + q\mathbb{Z}$$

gibt, wie auch erwartet wird (vergleiche (2.2) und [26, Theorem 6.6]). Die Tatsache, dass also nicht nur eine Primzahl nachgewiesen wurde, sondern bereits die korrekte Größenordnung, ist durchaus bemerkenswert. Sind die gemachten Voraussetzungen nicht erfüllt, so erhalten wir eine Aussage, die ähnlich bestmöglich ist. Siehe dazu Lemma 6.2, welches Theorem 2.2 enthält. Ähnliche Theoreme folgen auch aus den Behandlungen anderer Autoren zur Linnikschen Konstante.

Weiterhin erzielen wir leichte Verbesserungen gewisser Zwischenergebnisse aus [23]. Zum Zitieren an dieser Stelle eignen sich wahrscheinlich nur die beiden Folgenden.

Theorem 2.3. *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante q_0, so dass die Funktion aus (2.7) für $q \geq q_0$ höchstens eine Nullstelle in der Region*

$$\sigma \geq 1 - \frac{0.44}{\log q}, \quad |t| \leq 1$$

hat. Wenn diese Ausnahmenullstelle existiert, dann ist sie reell, einfach und gehört zu einem reellen Charakter $\chi \neq \chi_0$.

Heath-Brown beweist dieses Theorem mit der Konstanten $c = 0.348$ [23, Theorem 1, S.268] anstelle von $c = 0.44$. Durch eine kleine Variation der Schlussweise von Heath-Brown erhalten Liu und Wang (1998, [31, S.345-346]) die Konstante $c = 0.364$.

Für die Formulierung des nächsten Theorems setzen wir

$$N(\lambda) = \#\{\chi \text{ (mod } q) \mid L(s,\chi) \text{ hat eine Nullstelle in } \sigma \geq 1 - \frac{\lambda}{\log q},\ |t| \leq 1\}.$$

Wir verbessern die Konstante $c = \frac{67}{6} = 11.166\ldots$ aus [23, Theorem 6] leicht auf $c = 10.98$.

Theorem 2.4. *Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante q_0, so dass für $q \geq q_0$ und $0 < \lambda < \frac{1}{3} \log\log\log q$*

$$N(\lambda) \leq \frac{10.98}{\lambda}\left(e^{\frac{73\lambda}{30}} - e^{\frac{16\lambda}{15}}\right).$$

Die Arbeit ist wie folgt aufgeteilt. Im nächsten Kapitel 3 fassen wir einige Resultate von Heath-Brown [23] zusammen, die wir benötigen werden. Mit Hinblick auf die spätere Anwendung fügen wir dabei an manchen Stellen kleine Variationen und Verallgemeinerungen ein. In Kapitel 4 verbessern wir Abschätzungen für Regionen nahe $s = 1$, in denen die Dirichletschen L-Funktionen keine bzw. nur eine sehr begrenzte Anzahl an Nullstellen haben. Im gleichen Kapitel beweisen wir auch Theorem 2.3. In Kapitel 5 verbessern wir Abschätzungen von $N(\lambda)$. Dort wird Theorem 2.4 bewiesen. In Kapitel 6 benutzen wir die Ergebnisse der Kapitel 4 und 5, um die Theoreme 2.1 und 2.2 zu beweisen.

Von den neun Verbesserungspotentialen in [23, S.332-337], nennen wir sie VB1 bis VB9, liefern VB1, VB3 und VB6 nur sehr geringfügige Verbesserungen[4]. VB4 liefert zwar eine Verbesserung von mehreren Hundertsteln (wir beziehen uns immer auf die Linniksche Konstante L), aber dies nur für einen Teil der auftretenden Fälle, für den wir keine weitere Verbesserung nötig haben. Ähnliches gilt auch für VB8. Deswegen haben wir VB1, VB3, VB4, VB6 und VB8 letztendlich nicht benutzt. Diese Verbesserungspotentiale, sowie einige andere nicht verwendete Variationen, besprechen wir kurz in Kapitel 7.

An dieser Stelle möchten wir noch einmal auf die in der Notation vereinbarte Abkürzung

$$\mathscr{L} = \log q$$

hinweisen. Weiterhin beweisen wir jegliche Resultate meist nur für $q \geq q_0$, wobei q_0 eine effektiv berechenbare hinreichend große Konstante ist. Dabei ist es wichtig anzumerken, dass nur endlich

[4] Darunter verstehen wir Verbesserungen, die zu weniger als ca. 0.005 Verbesserung für die zulässige Linniksche Konstante L führen. Selbstverständlich müssen wir dabei betonen, dass diese Potentiale so wie *wir* sie verwendet haben keine hilfreichen Verbesserungen liefern.

viele solche Schlüsse in dieser Arbeit gezogen werden. Also kann das Maximum q_{max} all dieser q_0 genommen werden.

Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass diese Arbeit - wie auch der Artikel [23] - sich stark auf Computerberechnungen stützt. Diese wurden mit dem Computer-Algebra-Programm Maple 12.0 auf einem Laptop mit einem Intel Core Duo 2 GHz-Prozessor und 2 GB RAM durchgeführt. Dabei ließen wir Maple mit mindestens 10 Stellen Rechengenauigkeit rechnen, was eine höhere Präzision darstellt, als wir für unsere Resultate benutzt haben. Die entsprechenden Prozeduren liegen dieser Arbeit auf einer CD bei.

Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, um meinem Betreuer Herrn PD Dr. B. Z. Moroz für die konstante Unterstützung eingehend zu danken.

Kapitel 3

Vorbereitungen - Die Arbeit von Heath-Brown

Diese Arbeit basiert auf dem Artikel [23]. Deswegen möchten wir in diesem Kapitel gewisse Lemmata und Methoden daraus vorstellen. An einigen Stellen führen wir dabei mit Hinblick auf unsere späteren Anwendungen kleine Variationen und Verallgemeinerungen ein.

3.1 Nullstellenfreie Regionen

3.1.1 Verbesserung der Standardmethode

Wir möchten hier erst die übliche Methode („Standardmethode“) vorstellen, mit der Prinzip 1 aus §2.2 bewiesen wird, um dann aufzuzeigen, wie diese in [23] verbessert wird. Wir betrachten also für einen Charakter χ die Funktion $L(s,\chi)$. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass $\chi^2 \neq \chi_0$ und dass q groß genug ist. Außerdem betrachten wir nur Nullstellen ρ mit $|\Im\{\rho\}| \leq \mathscr{L}$. Man beachte, dass der Beweis für die verbleibenden Fälle, als auch der Beweis für Prinzip 2 aus §2.2, ähnlich abläuft.

Man betrachtet die reellwertige Funktion

$$h(\sigma+it) := \Re\left\{-\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}\Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^{it}}\right\} \quad (\sigma>1,\, t\in\mathbb{R}).$$

Aus der trigonometrischen Ungleichung

$$0 \leq 2(1+\cos\theta)^2 = 3+4\cos\theta+\cos 2\theta$$

folgt sofort mit $\theta = \arg(\chi(n)) - t\log n$, wobei $e^{i\arg(\chi(n))} = \chi(n)$, dass

$$0 \leq -3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) - 4\Re\left\{\frac{L'}{L}(\sigma+it,\chi)\right\} - \Re\left\{\frac{L'}{L}(\sigma+2it,\chi^2)\right\} \quad (\sigma>1,\, t\in\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Die Funktion $(L'/L)(s,\chi)$ ist meromorph und hat bei den Nullstellen ρ von $L(s,\chi)$ Pole erster

Ordnung. Also gilt[1] für eine Nullstelle ρ

$$\lim_{\substack{s\to\rho \\ \Re\{s-\rho\}>0}} h(s) = -\infty.$$

Die Idee ist nun grob gesagt die Folgende. Dazu lassen wir die Voraussetzung $\sigma > 1$ in (3.1) mal kurz außer Acht: Sei $\rho_0 = \sigma_0 + it_0$ eine nicht-triviale Nullstelle von $L(s, \chi)$. Setzen wir $t = t_0$ in (3.1) und lassen wir dort das σ von rechts gegen σ_0 gehen, so wird der zweite Term in (3.1) wegen der Poleigenschaft gegen „-4∞“ gehen. Der erste Term geht gegen etwas, dass „$\leq +3\infty$“ ist und der dritte Term ist nach oben beschränkt. Insgesamt bekämen wir „$0 \leq -\infty + C$“, also einen Widerspruch, wenn σ hinreichend nah bei σ_0 ist. Das Ergebnis: Die Nullstelle ρ_0 darf nicht zu nah an irgendeinem Wert $\sigma + it$ liegen, der in die Ungleichung (3.1) eingesetzt werden darf.

Um diese Idee zu präzisieren, werden konkrete Abschätzungen der drei Terme auf der rechten Seite von (3.1) benötigt. Diese folgen im Wesentlichen aus der Partialbruchzerlegung von $(L'/L)(s, \chi)$ (vergleiche z.B. [23, S.273], [36, Solution 6.5.9]). Für $1 < \sigma < 2$, $|t| \leq \mathscr{L}$, $\varepsilon > 0$ und $q \geq q_0(\varepsilon)$ gilt

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) < \frac{1}{\sigma - 1} + \varepsilon\mathscr{L} \tag{3.2}$$

und

$$-\Re\left\{\frac{L'}{L}(\sigma + it, \chi)\right\} < -\sum_{\rho} \Re\frac{1}{s-\rho} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\mathscr{L}. \tag{3.3}$$

Wegen $\Re\{1/(s-\rho)\} \geq 0$ folgt aus der letzten Ungleichung

$$-\Re\left\{\frac{L'}{L}(\sigma + it_0, \chi)\right\} < -\frac{1}{\sigma - \sigma_0} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\mathscr{L} \tag{3.4}$$

und

$$-\Re\left\{\frac{L'}{L}(\sigma + 2it_0, \chi^2)\right\} < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\mathscr{L}. \tag{3.5}$$

Aus (3.1), (3.2), (3.4) und(3.5) folgt dann für $1 < \sigma < 2$, dass

$$0 \leq \frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \sigma_0} + \left(\frac{5}{2} + 8\varepsilon\right)\mathscr{L}$$

und daraus für eine Konstante $c > 0$, dass $\sigma_0 < 1 - c\mathscr{L}^{-1}$. Heath-Brown nimmt nun folgende Veränderungen an diesem Standardargument vor:

- Offensichtlich spielt die Konstante $\frac{1}{2}$ in (3.3) eine wichtige Rolle für den Wert von c. Indem Heath-Brown die meisten Nullstellen in der Summe in (3.3) weglässt, ist er in der Lage mittels eines Theorems von Burgess zur Größe von Charaktersummen die Konstante auf $\frac{1}{6}$ (bzw. in manchen Spezialfällen $\frac{1}{8}$) zu verbessern [23, Lemma 3.1].

- Eine erste spezielle Methode, die in [23] benutzt wird, besteht darin zusätzlich zur Funktion

[1] Wähle dazu eine Nullstelle ρ von $L(s, \chi)$, setze $s - \rho = re^{i\theta}$ ($r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$) und k gleich der Nullstellenordnung von ρ. Aus der Poleigenschaft folgt, dass es eine in ρ holomorphe Funktion $h_0(s)$ gibt, so dass in einer Umgebung von ρ gilt

$$h(s) = \Re\{h_0(s)\} + \Re\frac{-k}{s-\rho} = O(1) - k\frac{\cos\theta}{r}.$$

Letzteres geht für $r \to 0$ und $\cos\theta > 0$ gegen $-\infty$. Diese beiden Bedingungen sind aber genau die genannten Bedingungen $s \to \rho$ und $\Re\{s - \rho\} > 0$.

$(L'/L)(s,\chi)$ auch ihre k-te Ableitung

$$\left(\frac{L'}{L}\right)^{(k)}(s,\chi)$$

zu verwenden [23, §4]. Man erhält dann verschiedene neue Ungleichungen von ähnlichem Typ wie (3.1)-(3.3). Durch geschicktes Kombinieren solcher Ungleichungen folgen letztendlich Verbesserungen der nullstellenfreien Region. Diese Methode wird in unserer Arbeit jedoch nicht vorkommen. Der Grund ist, dass sich für uns die nachfolgend genannte zweite Methode in Verbindung mit Verbesserungspotential 2 als überlegen erwies.

- Eine zweite Methode liegt darin, anstelle von

$$\Re\left\{-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^s}\right\}$$

die gewichtete Variante

$$K(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^s}\right\} f(\mathscr{L}^{-1}\log n)$$

zu betrachten. Dabei wird f später aus einer Menge von Funktionen mit endlichem Träger und einer zu $\Re\{1/(s-\rho)\} \geq 0$ analogen Bedingung gewählt. Werden beliebige f zugelassen, so kann vermöge $f(t) = \mathscr{L}^k t^k$ die erste Methode als Spezialfall der zweiten angesehen werden.

Ein Vorteil dieser zweiten Methode ist, dass die Gewichtsfunktion f aus einer Menge von Funktionen so gewählt werden kann, dass die resultierenden Konstanten optimiert werden. Da f endlichen Träger hat, können außerdem in den zu (3.1) analogen Ungleichungen auch Werte für s eingesetzt werden, die links von $\Re\{s\} = 1$ liegen, was wiederum vorteilhaft ist.

Im folgenden Abschnitt werden wir die beiden für $K(s,\chi)$ resultierenden Analoga zu (3.2) und (3.3) zitieren.

3.1.2 Zwei wichtige Lemmata

Sei χ ein Charakter $\pmod q$ mit $\chi \neq \chi_0$ und

$$\phi = \phi(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{falls } q \text{ kubik-frei}^2 \text{ oder } \operatorname{ord}\chi \leq \mathscr{L}, \\ \frac{1}{3} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren noch die beiden folgenden Bedingungen an eine Funktion f.

Bedingung 1 (S.280 in [23]). Sei $x_0 > 0$ und $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) = 0$ für $t \geq x_0$. Weiterhin sei $B > 0$ eine Konstante, so dass für alle $t \in (0, x_0)$ die Funktion f zwei Mal stetig differenzierbar ist und $|f''(t)| \leq B$.

Erfüllt f Bedingung 1, so ist sie als stetige Funktion mit kompaktem Träger auch beschränkt. Aus der Beschränktheit von $f''(t)$ auf $(0, x_0)$ folgt außerdem, dass auch $f'(t)$ auf $(0, x_0)$ beschränkt ist (vergleiche [23, (5.1)]) und dass die beiden Grenzwerte $\lim_{t\to 0^+} f'(t)$ und $\lim_{t\to x_0^-} f'(t)$ in $\mathbb{R}$ existieren.

[2] Das bedeutet, dass für alle Primzahlen p gilt $p^3 \nmid q$.

Bedingung 2 (S.286 in [23]). Es ist $f(t) \geq 0$ für $t \in [0, \infty)$ und die Laplace-Transformierte

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt$$

von f erfüllt für $\Re\{z\} \geq 0$ die Ungleichung $\Re\{F(z)\} \geq 0$.

Für die gesamte Arbeit gilt, dass mit $F(z)$ immer die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$ gemeint ist, wobei letztere Funktion aus dem Zusammenhang ersichtlich sein wird. In §3.1.3 werden wir konkrete Beispiele für Funktionen f vorstellen, die diese beiden Bedingungen erfüllen. Das folgende Lemma von Heath-Brown übernimmt in unseren Analysen die Rolle der Ungleichung (3.2).

Lemma 3.1 (Lemma 5.3 aus [23]). *Sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit*

$$|\sigma - 1| \leq \frac{(\log \mathscr{L})^{\frac{1}{2}}}{\mathscr{L}}, \quad |t| \leq \mathscr{L}.$$

Weiterhin sei f eine Funktion, die Bedingung 1 erfüllt. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{\chi_0(n)}{n^s} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) = \mathscr{L} \cdot F((s-1)\mathscr{L}) + O\left(\frac{\mathscr{L}}{\log \mathscr{L}}\right),$$

wobei die implizite Konstante nur von f abhängt.

Das nächste Lemma ersetzt die Ungleichung (3.3).

Lemma 3.2 (Lemma 5.2 aus [23]). *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter $\pmod q$ und $\phi = \phi(\chi)$ so wie zu Beginn dieses Abschnitts definiert. Ferner sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit*

$$|\sigma - 1| \leq \frac{(\log \mathscr{L})^{\frac{1}{2}}}{\mathscr{L}}, \quad |t| \leq \mathscr{L} \tag{3.6}$$

und f eine Funktion, die Bedingung 1 erfüllt und für die $f(0) \geq 0$ gilt. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, 1)$, das von f, aber nicht von χ, q oder s abhängt, und ein $q_0 = q_0(f, \varepsilon)$, so dass für alle $q \geq q_0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^s}\right\} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) \leq -\mathscr{L} \sum_{|1+it-\rho| \leq \delta} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} + \frac{f(0)}{2} \phi \mathscr{L} + \varepsilon \mathscr{L}.$$

Dabei erstreckt sich die Summation über jene nicht-trivialen Nullstellen ρ von $L(s, \chi)$, welche die Bedingung $|1 + it - \rho| \leq \delta$ erfüllen. Jede Nullstelle taucht gemäß ihrer Vielfachheit auf.

Für den Beweis des Theorems von Linnik werden am Ende nur jene Nullstellen ρ relevant sein, die $\Re\{\rho\} \geq 1 - C\mathscr{L}^{-1}$ und $|\Im\{\rho\}| \leq C\mathscr{L}^{-1}$ für eine absolute Konstante $C > 0$ erfüllen. Deswegen reicht es aus nur Nullstellen im folgenden Viereck

$$R := R(l)$$

zu betrachten, wobei

$$R(x) = \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 - \frac{\log \log \mathscr{L}}{3\mathscr{L}} \leq \sigma \leq 1,\ |t| \leq x\} \tag{3.7}$$

und wir für l die von q abhängige Konstante aus folgendem Lemma wählen.

Lemma 3.3 (Lemma 6.1 aus [23]). *Es gibt ein q_0 und eine von q abhängige Zahl $l = l(q) \in \mathbb{N}$ mit $l \leq \frac{1}{10}\mathscr{L}$, so dass für $q \geq q_0$ die Funktion*

$$\prod_{\chi \pmod q} L(s,\chi)$$

keine Nullstellen in den beiden Vierecken

$$R(10l)\backslash R(l)$$

hat.

Mit Hilfe von Lemma 3.3 formulieren wir jetzt Lemma 3.2 insoweit neu, wie wir es später für die Anwendung brauchen werden. Dabei speisen wir die Tatsache mit ein, dass bei Lemma 3.2 gewisse Nullstellen ρ, die nicht der Bedingung $|1 + it - \rho| \leq \delta$ genügen, mit in die Summe reingenommen werden können, weil die entsprechenden zusätzlichen Terme dann vernachlässigbar klein sind. Dieser Sachverhalt wird in [23, S.287 Mitte] kurz angesprochen, aber nicht explizit ausformuliert. Ein weiterer wichtiger Aspekt, der in die Neuformulierung miteinfließen wird, ist der Fakt, dass man, wenn f die Bedingung 2 erfüllt, jegliche Nullstellen ρ mit $\Re\{\rho\} \leq \Re\{s\}$ in Lemma 3.2 weglassen darf.

Lemma 3.4 („Arbeitsversion“ von Lemma 5.2 aus [23]). *Sei $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter $\pmod q$ und seien R, l, $R(x)$ und ϕ so definiert wie oben. Sei weiterhin $s \in R(9l)$ und die Anzahl der Nullstellen[2] $\rho \in R$ von $L(s,\chi)$ mit $\Re\{\rho\} > \Re\{s\}$ maximal 10, d.h.*

$$A_1 := \{\rho \in R \mid L(\rho,\chi) = 0,\ \Re\{\rho\} > \Re\{s\}\} \quad \textit{und} \quad \#A_1 \leq 10,$$

wobei # anzeigt, dass wir die Elemente der Menge A_1 mit Vielfachheit zählen. Sei A_2 eine beliebige Menge mit

$$A_2 \subseteq \{\rho \in R \mid L(\rho,\chi) = 0,\ \Re\{\rho\} \leq \Re\{s\}\} \quad \textit{und} \quad \#A_2 \leq 10.$$

Wenn f Bedingung 1 und 2 erfüllt, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $q \geq q_0(f,\varepsilon)$

$$K(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^s}\right\} f(\mathscr{L}^{-1}\log n)$$
$$\leq -\mathscr{L} \sum_{\rho \in A_1 \cup A_2} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} + f(0)\frac{\phi}{2}\mathscr{L} + \varepsilon\mathscr{L}.$$

Beweis. (vergleiche [23, §6])
Sei $\varepsilon > 0$ und $s \in R(9l)$. Wir benutzen die Aussage in Lemma 3.2 mit $\frac{\varepsilon}{2}$ anstelle von ε und bekommen feste Parameter $\delta = \delta(f)$ und $q_1 = q_1(f,\varepsilon)$. Der Beweis der folgenden zwei Ungleichungen (3.8) und (3.9) liefert die Aussage des Lemmas:

[2] Damit meinen wir immer die Anzahl der Nullstellen gezählt mit Vielfachheit.

$$
\begin{aligned}
-\sum_{|1+it-\rho|\leq\delta} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} &\leq -\sum_{\substack{\rho\in R\\ |1+it-\rho|\leq\delta\\ (\Re\{\rho\}\leq\Re\{s\}\Rightarrow\rho\in A_2)}} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} && (3.8)\\
&\leq -\sum_{\substack{\rho\in R\\ (\Re\{\rho\}\leq\Re\{s\}\Rightarrow\rho\in A_2)}} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} + \frac{\varepsilon}{2} && (3.9)\\
&= -\sum_{\rho\in A_1\cup A_2} \Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Beweis von (3.8): Sei ρ gegeben mit $|1+it-\rho|\leq\delta$. Wegen der Voraussetzung $s\in R(9l)$ und $\delta<1\leq l$ folgt

$$|\Im\{\rho\}|\leq|t|+\delta<10l.$$

Aus Lemma 3.3 folgt dann, dass

$$\Re\{\rho\}<1-\frac{\log\log\mathscr{L}}{3\mathscr{L}}\quad\text{oder}\quad\rho\in R.$$

Tritt der erste Fall auf, dann gilt $\Re\{s-\rho\}\geq 0$ und nach Bedingung 2 folgt

$$-\Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\}\leq 0,$$

so dass wir nach oben abschätzen können, indem wir diesen Term weglassen. Zusätzlich lassen wir jegliche Nullstellen ρ weg, welche die beiden Bedingungen $\Re\{\rho\}\leq\Re\{s\}$ und $\rho\notin A_2$ erfüllen, was wieder nach Bedingung 2 möglich ist. Es folgt (3.8).

Beweis von (3.9): Sei $\rho\in R$ eine Nullstelle von $L(s,\chi)$ mit $|1+it-\rho|>\delta$. Ist $\Re\{\rho\}\leq\Re\{s\}$, so erfülle ρ die Bedingung $\rho\in A_2$. Es muss gezeigt werden, dass die zu diesen Nullstellen ρ gehörigen Terme einen Beitrag von maximal $\frac{\varepsilon}{2}$ liefern. Zunächst folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|\Im\{s-\rho\}|=|i(t-\Im\{\rho\})|\geq|1+it-\rho|-|1-\Re\{\rho\}|>\delta-\frac{\log\log\mathscr{L}}{3\mathscr{L}}>\frac{\delta}{2}$$

für $q\geq q_2=q_2(\delta)$. Damit ist

$$|\Im\{(s-\rho)\mathscr{L}\}|\geq\frac{\delta}{2}\mathscr{L}\quad\text{und}\quad|\Re\{(s-\rho)\mathscr{L}\}|\leq\frac{1}{3}\log\log\mathscr{L}.$$

Schreiben wir nun $u+iv=(s-\rho)\mathscr{L}$, dann folgt mit partieller Integration[3] (siehe auch [23, S.280-281])

$$
\begin{aligned}
\Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\} &= \int_0^{x_0} f(t)e^{-ut}\cos(vt)\,dt\\
&= f(x_0)e^{-ux_0}\frac{\sin(vx_0)}{v}-f(0)e^0\frac{\sin(0)}{v}-\int_0^{x_0}\left(f'(t)e^{-ut}-uf(t)e^{-ut}\right)\frac{\sin(vt)}{v}\,dt\\
&\ll_{f,\delta}\mathscr{L}^{-1}(\log^{x_0}\mathscr{L})\log\log\mathscr{L}. && (3.10)
\end{aligned}
$$

[3] Normalerweise wird für die partielle Integration vorausgesetzt, dass die zu differenzierende Funktion auf dem Intervall *einschließlich* der Integrationsgrenzen definiert und differenzierbar ist. Unsere Art die partielle Integration anzuwenden, obwohl f' nicht in 0 und x_0 definiert ist, ist trotzdem korrekt, was schnell aus Bedingung 1 gefolgert werden kann (der gleiche Sachverhalt wird in [23, S.280-281] benutzt). Eine Begründung wäre f außerhalb von $[0,x_0]$ passend zu einer Funktion $\overline{f}$ fortzusetzen, so dass $\overline{f}$ auf $[0,x_0]$ differenzierbar und $\overline{f}'=f'$ auf $(0,x_0)$ ist.

Dabei haben wir die Tatsache benutzt, dass f' auf $(0, x_0)$ beschränkt ist, was weiter oben angesprochen wurde. Jede anfängliche Nullstelle ρ liefert also für $q \to \infty$ einen Beitrag von $o_{f,\delta}(1)$. Beachte, dass f und δ fest und unabhängig von q sind. Da wegen der Voraussetzungen an A_1 und A_2 nur maximal 20 solche ρ existieren, gibt es ein $q_3 = q_3(f, \delta, \varepsilon)$, so dass der Beitrag dieser Nullstellen insgesamt $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist, wenn $q \geq q_3$. Für das Lemma wählen wir $q_0 = \max\{q_1, q_2, q_3\}$ und wir sind fertig. $\square$

Die Zahl 10 im vorigen Lemma war willkürlich gewählt. Der Beweis hätte offensichtlich mit jeder festen Zahl $N \in \mathbb{N}$ anstelle von 10 geklappt.

Analog zu [23, S.285 und 287] benennen wir einige Nullstellen aus dem Viereck R. Zu einem festen q betrachte man sämtliche in R liegenden Nullstellen ρ der Funktion[4]

$$P(s) = \prod_{\chi \pmod q} L(s, \chi). \tag{3.11}$$

Sei ρ_1 eine Nullstelle von $P(s)$ in R mit maximalem Realteil und χ_1 ein dazugehöriger Charakter, also $L(\rho_1, \chi_1) = 0$. Wähle nun eine Nullstelle ρ_2 von[5]

$$\frac{P(s)}{L(s, \chi_1) L(s, \overline{\chi_1})}$$

in R mit maximalem Realteil und schreibe χ_2 für den zugehörigen Charakter. Mache so weiter bis es in R keine weiteren Nullstellen mehr gibt. Mit anderen Worten betrachtet man im k-ten Schritt ($k \geq 2$) die Nullstellen von

$$\frac{P(s)}{L(s, \chi_1) L(s, \overline{\chi_1}) \cdot \ldots \cdot L(s, \chi_{k-1}) L(s, \overline{\chi_{k-1}})}$$

in R und wählt ρ_k unter diesen Nullstellen so, dass $\Re\{\rho_k\}$ maximal ist. Wir halten die zentralen Eigenschaften der eben gewählten Nullstellen und Charaktere fest. Das ist einerseits

$$\chi_i \neq \chi_j, \overline{\chi_j} \quad \text{für} \quad i \neq j$$

und andererseits wegen Lemma 3.3 die Aussage für $q \geq q_0$, dass wenn $\chi \neq \chi_i, \overline{\chi_i}$ für $1 \leq i < k$ ist und $L(\rho, \chi) = 0$, dann gilt

$$\Re\{\rho\} \leq \Re\{\rho_k\} \quad \text{oder} \quad |\Im\{\rho\}| \geq 10l. \tag{3.12}$$

Für die spätere Anwendung setzen wir

$$\rho_k = \beta_k + i\gamma_k, \quad \beta_k = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda_k, \quad \gamma_k = \mathscr{L}^{-1}\mu_k.$$

Angenommen, $L(s, \chi_1)$ hat eine zusätzliche Nullstelle $\rho' \neq \rho_1$ in R oder die Nullstellenordnung der Nullstelle ρ_1 von $L(s, \chi_1)$ ist ≥ 2. Dann wählen wir folgendermaßen eine Nullstelle $\rho' \in R$ von $L(s, \chi_1)$:

- Fall 1: Ist die Nullstellenordnung von ρ_1 größer oder gleich 2, so wählen wir $\rho' = \rho_1$.
- Fall 2: Sind wir nicht in Fall 1 und ist χ_1 reell und ρ_1 komplex, so wählen wir ρ' unter den Nullstellen in $R \backslash \{\rho_1, \overline{\rho_1}\}$ so, dass $\Re\{\rho'\}$ maximal ist.

[4] Beachtet man eine allgemein bekannte nullstellenfreie Region der Riemannschen ζ-Funktion, welche sich ja auf $L(s, \chi_0)$ überträgt, so folgt, dass $L(s, \chi_0)$ keine Nullstellen in R hat, wenn q groß genug ist.

[5] Zusätzlich zu den Nullstellen von $L(s, \chi_1)$ wurden auch jene von $L(s, \overline{\chi_1})$ „herausgenommen". Das liegt daran, dass $\rho \in R$ genau dann eine Nullstelle von $L(s, \chi)$ ist, wenn $\overline{\rho}$ eine Nullstelle von $L(s, \overline{\chi})$ ist. Kennt man also die Nullstellen von $L(s, \chi_1)$ dann kennt man auch jene von $L(s, \overline{\chi_1})$.

- Fall 3: Sind wir nicht in Fall 1 oder Fall 2, so wählen wir ρ' unter den Nullstellen in $R\backslash\{\rho_1\}$ so, dass $\Re\{\rho'\}$ maximal ist.

In Analogie zu vorher setzen wir

$$\rho' = \beta' + i\gamma', \quad \beta' = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda', \quad \gamma' = \mathscr{L}^{-1}\mu'.$$

In Kapitel 4 werden wir obere Abschätzungen für die Realteile der Nullstellen ρ_1, ρ_2, ρ_3 und ρ' beweisen.

3.1.3 Funktionen, die Bedingung 1 und 2 erfüllen

Zur Anwendung des zentralen Lemmas 3.4 werden Funktionen f benötigt, die Bedingung 1 und 2 erfüllen. Bedingung 1 stellt keine Hürden, Bedingung 2 jedoch schon. Heath-Brown kreiert in [23, §7] passende Funktionen f, indem er mit dem Ansatz

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)g(t-x)\,dx \tag{3.13}$$

startet. Dabei sei $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(x) = g(-x)$ und $g(x) \geq 0$. Außerdem sei $g(x) = 0$ in $|x| \geq \gamma$ für eine positive Konstante γ. Um zu zeigen, dass f Bedingung 2 erfüllt, wird folgendes Lemma benötigt, welches ein Korollar vom Maximumsprinzip holomorpher Funktionen ist.

Lemma 3.5 (Lemma 4.1 aus [23]). *Seien $F_1(z)$ und $F_2(z)$ holomorphe Funktionen in $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re\{z\} \geq 0\}$ und sei $\Re\{F_1(z)\} \geq |F_2(z)|$ auf $\Re\{z\} = 0$. Weiterhin gelte, dass F_1 und F_2 in $\mathscr{H}$ für $|z| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 gehen*[6]*. Dann ist $\Re\{F_1(z)\} \geq |F_2(z)|$ auf ganz $\mathscr{H}$.*

Damit folgt

Lemma 3.6 (S.289 in [23]). *Sei f so definiert wie in (3.13) und g erfülle die obigen Bedingungen. Zusätzlich erfülle f Bedingung 1. Dann erfüllt f Bedingung 2.*

Beweis. Sei F die Laplace-Transformierte von f. Mit den Eigenschaften von g und der Gleichung

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

schlussfolgern wir für $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Re\{F(iy)\} &= \int_0^{\infty} f(t)\cos(yt)\,dt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x)g(t-x)\cos(yt)\,dx\,dt + \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} g(x)g(t-x)\cos(yt)\,dx\,dt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x)g(t-x)\cos(yt)\,dt\,dx + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x)g(t+x)\cos(yt)\,dt\,dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-x}^{\infty} g(x)g(l)\cos(y(l+x))\,dl\,dx + \int_0^{\infty}\int_{x}^{\infty} g(x)g(l)\cos(y(l-x))\,dl\,dx \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x)g(l)\cos(y(l+x))\,dl\,dx + \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x)g(l)\cos(y(l-x))\,dl\,dx \\
&=2\left(\int_0^{\infty} g(t)\cos(ty)\,dt\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

[6] Darunter verstehen wir, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $R = R(\varepsilon, F_i) > 0$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re\{z\} \geq 0$ und $|z| \geq R$ die Ungleichung $|F_i(z)| \leq \varepsilon$ erfüllt ist.

In Lemma 3.5 wählen wir nun $F_1 = F$ und $F_2 = 0$ und beachten, dass $F(z)$ in $\mathscr{H}$ gleichmäßig gegen 0 geht, wenn $|z| \to \infty$. Letzteres folgt z.B. aus [23, (5.3),(5.4)] (beachte, dass f Bedingung 1 erfüllt). Es folgt das Lemma. □

In der Menge der oben genannten f findet Heath-Brown optimale Elemente durch einen „Variationsansatz“ [23, §7]. Die Analyse führt letztendlich zu Funktionen f, die aus den folgenden Funktionen g resultieren ($x \in (-\gamma, \gamma)$)

$$g(x) = \gamma^2 - x^2, \tag{3.14}$$

$$g(x) = \cos(c_1 x) - \cos(c_1 \gamma), \tag{3.15}$$

$$g(x) = \cosh(c_1 \gamma) - \cosh(c_1 x), \tag{3.16}$$

wobei $g(x) = 0$ gesetzt wird für $x \notin (-\gamma, \gamma)$ und c_1, γ gewisse Parameter sind (vergleiche [23, Lemma 7.1-7.5]). In dieser Arbeit werden wir nur jene f benutzen, die aus (3.14) resultieren. Dann folgt

$$f(t) = \begin{cases} \int_{t-\gamma}^{\gamma} g(x)g(t-x)\,dx = -\frac{1}{30}t^5 + \frac{2\gamma^2}{3}t^3 - \frac{4\gamma^3}{3}t^2 + \frac{16\gamma^5}{15} & \text{falls } t \in [0, 2\gamma), \\ 0 & \text{falls } t \geq 2\gamma. \end{cases} \tag{3.17}$$

Es folgt, dass f Bedingung 1 erfüllt, also nach obigem Lemma auch Bedingung 2. Für die zugehörige Laplace-Transformierte F gilt mittels partieller Integration (vergleiche [23, S.312])

$$F(z) = \begin{cases} \frac{16\gamma^5}{15}z^{-1} - \frac{8\gamma^3}{3}z^{-3} + 4\gamma^2(1 + e^{-2\gamma z})z^{-4} & \\ \qquad\qquad +4(-1 + e^{-2\gamma z} + 2\gamma z e^{-2\gamma z})z^{-6} & \text{falls } z \neq 0, \\ \frac{8\gamma^6}{9} & \text{falls } z = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Wir weisen darauf hin, dass für die gesamte restliche Arbeit eine Funktion f in der Regel immer für die Funktion in (3.17) für ein gewisses $\gamma > 0$ stehen wird. In der Regel werden wir später nur das $\gamma > 0$ anstelle des f angeben, wodurch letzteres dann eindeutig bestimmt ist.

Der größte Vorteil der obigen speziellen Wahl für g sind die später viel schneller durchführbaren Computerberechnungen, welche aufgrund der Einfachheit von $f(t)$ und $F(z)$ resultieren. Ein weiterer Vorteil ist, dass sich für großes $|\Im\{z\}|$ die Funktion $F(z)$ viel leichter nach oben abschätzen lässt. Außerdem zeigen gewisse numerische Proberechnungen, dass mit denjenigen Funktionen f, die aus (3.15) oder (3.16) resultieren, höchstens nur minimal bessere Werte erzielbar sind. Dabei muss beachtet werden, dass die Graphen aller drei Versionen von g letztendlich „qualitativ recht identisch aussehen“. Ein paar weitere Bemerkungen zu Funktionen, die Bedingung 1 und 2 erfüllen, sind in §7.5 zu finden.

3.1.4 Abschätzungen für λ_2 und λ', wenn ρ_1 und χ_1 reell sind

In diesem Abschnitt möchten wir zwei Tabellen aus [23, §8] vorstellen, die wir später benötigen. Generalvoraussetzung ist dabei, dass χ_1 und ρ_1 beide reell sind.

Erklärung von [23, Table 4 (§8)]: Diese Tabelle ist ein Korollar von [23, Lemma 8.3], welches unter der Voraussetzung gilt, dass ρ' komplex ist. Ist jedoch ρ' reell, so liefert [23, Lemma 8.2] bessere Werte, so dass diese Tabelle für beide Fälle gilt. Was die Tabelle aussagt, wird kurz vor der Tabelle erklärt: Beispielsweise besagt der Eintrag $0.7, 1.724, 4.5, 0.85$, dass aus $\lambda_1 \leq 0.70$ die Abschätzung $\lambda' \geq 1.724$ folgt. Diese Aussage wurde dabei zuerst nur für den Fall bewiesen, dass $\lambda_1 \in [0.65, 0.70]$. Da aber für kleinere λ_1 noch bessere Abschätzungen gelten, gilt die Abschätzung $\lambda' \geq 1.724$ immer wenn $\lambda_1 \leq 0.70$.

Wir weisen auch darauf hin, dass die Werte dieser Tabelle mit Hilfe von Verbesserungspotential 2 [23, S.332] hätten verbessert werden können. Dies ist für den Beweis von Theorem 2.1 aber nicht notwendig, also werden wir dies nicht tun.

Erklärung von [23, Table 7 (§8)]: Hier gilt Analoges wie bei der vorigen Tabelle. Diesmal wurde diese Tabelle unter der Voraussetzung $\chi_2^4 \neq \chi_0$ und $\lambda_2 \leq \lambda'$ bewiesen. Für den Fall $\chi_2^4 = \chi_0$ folgen vermöge [23, Table 6 (§8)] bessere Werte (bis auf den Fall $\lambda_1 \leq 0.10$). Genauso folgen bessere Werte durch [23, Table 2-4 (§8)], wenn $\lambda_2 > \lambda'$ ist. Insgesamt folgt wieder, dass diese Tabelle in allen Fällen gültig ist (ausgenommen wenn $\lambda_1 \leq 0.10$).

Die in den Tabellen auftauchenden Werte für λ, a und K sind Parameter, die bei den jeweiligen Rechnungen benutzt wurden. Sie sind für die letztendlichen Aussagen nicht relevant.

3.2 Nullstellendichte

3.2.1 Die generelle Idee

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Vorstellung einer (bzw. der) generellen Idee zum Abschätzen der Anzahl der Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen in einer Region

$$\Re\{s\} \geq \sigma, \quad |\Im\{s\}| \leq T, \tag{3.19}$$

wobei $\sigma \in (\frac{1}{2}, 1]$ und $T \geq 1$.

Die Struktur der Funktion $|L(s,\chi)| = |\sum_n \chi(n)n^{-s}|$ erlaubt erstmal keine leichten Abschätzungen nach unten, mit denen $|L(s,\chi)| > 0$ gefolgert werden könnte. Die Idee ist nun die Folgende. Wähle eine passende komplexe Funktion $M(s,\chi)$ und zähle die Nullstellen vom Produkt

$$P(s) = |L(s,\chi)M(s,\chi)|.$$

Damit dieser Ansatz hilfreich sein kann, sollte

- $P(s)$ Null sein an den Nullstellen von $L(s,\chi)$, also sollte $M(s,\chi)$ an diesen Stellen keine Polstellen haben, was erfüllt ist wenn beispielsweise $M(s,\chi)$ überall holomorph ist,

- $P(s)$ sollte eine Struktur haben, die sich eher nach unten abschätzen lässt als $L(s,\chi)$ und

- $M(s,\chi)$ sollte selbst nicht zu viele Nullstellen haben, die sich ja dann auf $P(s)$ übertragen.

Es empfiehlt sich die Funktion ($X \geq 1$)

$$M(s,\chi) = \sum_{n \leq X} \mu(n)\chi(n)n^{-s} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\chi(n)n^{-s} = \frac{1}{L(s,\chi)},$$

denn in Regionen, in denen $L(s,\chi)$ keine Nullstellen besitzt, wäre $P(s)$ immer nahe bei 1 (vergleiche [26, (10.10)]). Folglich kann man in solchen Regionen eher darauf hoffen $P(s) > 0$ beweisen zu können, als zu zeigen, dass $|L(s,\chi)| > 0$, da $L(s,\chi)$ dort eher sehr kleine Werte nah bei 0 annehmen könnte.

Aufgrund von $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ für $n > 1$ folgt nun für eine Nullstelle ρ von $L(s, \chi)$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= L(\rho, \chi)M(\rho, \chi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-\rho} \\ &= 1 + \sum_{X<n\leq Y} a_n \chi(n) n^{-\rho} + O\left(\sum_{n>Y} a_n \chi(n) n^{-\rho}\right) \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d\leq X}} \mu(d).$$

Ist Y groß genug, dann ist der Betrag des Restterms $\leq \frac{1}{2}$ und es folgt die zentrale Ungleichung

$$1 \leq 2 \left| \sum_{X<n\leq Y} a_n \chi(n) n^{-\rho} \right| =: |D(\rho)|. \tag{3.20}$$

Die rechte Seite von (3.20) wird naheliegend auch „Nullstellendetektor" genannt. Nun kann gezeigt werden, dass $D(\rho)$ nicht für zu viele verschiedene Werte $\rho \in \mathbb{C}$ die Ungleichung (3.20) erfüllen kann[7]. Einerseits sorgt nämlich der Faktor $n^{-\Re\{\rho\}}$ dafür, dass die Terme in der Summe generell recht klein sind. Andererseits sorgt der Faktor $n^{-i\Im\{\rho\}}$ für die wesentliche Eigenschaft, dass die rechte Seite nicht gleichzeitig groß sein kann für viele verschiedene $\Im(\rho)$ (mehr dazu in [26, §9]).

Werden die Nullstellen so in Mengen M_i unterteilt, wie in der letzten Fußnote erwähnt wurde, dann folgt

$$N(\sigma, T, \chi) \leq 4 \sum_i \sum_{\rho \in M_i} |D(\rho)|^2$$

und daraus folgen wiederum Theoreme in der Form von Prinzip 3, welches in §2.2 angesprochen wurde.

Für den Beweis des Linnikschen Theorems erweist es sich als besser, Abschätzungen für die Anzahl der Charaktere, die mindestens eine Nullstelle in einer gewissen Region haben, zu beweisen. Man geht dann genauso vor wie oben, summiert aber eben nicht über die verschiedenen Nullstellen ρ eines $L(s, \chi)$, sondern über alle Charaktere χ mit einer zugehörigen Nullstelle $\rho(\chi)$. In diesem Fall verliert der $\overline{\text{Term}}$ $n^{-i\Im(\rho)}$ seine erwähnte Rolle. Diese wird von der Tatsache übernommen, dass $\sum_n \chi(n)\overline{\chi'(n)}$ sehr klein ist, falls $\chi \neq \chi'$.

3.2.2 Das Vorgehen mit Hinblick auf das Linniksche Theorem

Dieser Abschnitt folgt präzise den Ausführungen in [17, §5] (Graham) und [23, §11] (Heath-Brown). Ziel ist es aufzuzeigen, wie [23, Lemma 11.1] aussieht, wenn die Wahl der Koeffizienten θ_d und ψ_d noch offen gelassen wird. Später werden wir nämlich etwas andere Koeffizienten ψ_d wählen, als jene aus [23, §11].

Seien $q \in \mathbb{N}$ und

$$0 < \lambda \leq \lambda_0 := \frac{1}{3} \log \log \mathscr{L}.$$

[7] Gibt es ein ρ, für das $|D(\rho)|$ sehr groß ist, dann wird es natürlich für alle (unendlich vielen) Werte in einer kleinen Umgebung von ρ sehr groß sein. Was jedoch gezeigt werden kann ist, dass $D(\rho)$ nicht zu groß für viele verschiedene „gut verteilte" $\rho \in \mathbb{C}$ sein kann. Deswegen werden in der Anwendung die Nullstellen von $L(s, \chi)$ in verschiedene Mengen M_i unterteilt, so dass Nullstellen in der gleichen Menge M_i einen gewissen Mindestabstand voneinander haben. Dies ist möglich, da die Gesamtanzahl der Nullstellen im Wesentlichen bekannt ist.

Für die Abschätzung der Linnikschen Konstante erweist es sich als vorteilhaft die Größe

$$N(\lambda) = \#\{\chi \ (\mathrm{mod}\ q) \mid L(s,\chi) \text{ hat eine Nullstelle in } \sigma \geq 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda,\ |t| \leq 1\}$$

abzuschätzen. Dabei findet die gleiche Idee Anwendung, welche im letzten Abschnitt angesprochen wurde.

Wir benutzen die Bezeichnungen $\chi^{(1)}$, $\chi^{(2)}$, …, $\chi^{(N(\lambda))}$ für die entsprechenden Charaktere. Zu jedem dieser Charaktere χ (es ist offensichtlich $\chi \neq \chi_0$ für q groß genug) wählen wir eine zugehörige Nullstelle $\rho(\chi) = \rho^{(k)}$ und setzen

$$\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\gamma^{(k)}, \quad \beta^{(k)} = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda^{(k)}.$$

Wir halten einen solchen Charakter $\chi = \chi^{(k)}$ mit zugehöriger Nullstelle $\rho = \rho^{(k)}$ fest. Erste Aufgabe ist die Herleitung eines Nullstellendetektors, vergleiche (3.20). Es erweist sich als praktisch mit dem Ansatz

$$M(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{v,w \\ [v,w]=n}} \psi_v \theta_w \Big) \chi(n) n^{-s}$$

(wir schreiben $[v,w] = \mathrm{kgV}(v,w)$) zu beginnen mit Koeffizienten

$$\psi_v \ll 1, \qquad \theta_w \ll 1 \qquad (v,w \in \mathbb{N}). \tag{3.21}$$

Es folgt, passende Konvergenz vorausgesetzt, dass

$$0 = L(\rho,\chi)M(\rho,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \psi_d)(\sum_{d|n} \theta_d)\chi(n)n^{-\rho}. \tag{3.22}$$

Sei $X \geq 1$ und setze $q^x = X$. Graham nimmt von der letzten rechten Seite die ersten X Terme, betrachtet also die Summe

$$\sum_{n \leq X} (\sum_{d|n} \psi_d)(\sum_{d|n} \theta_d)\chi(n)n^{-\rho},$$

während Heath-Brown die „verwandte“ Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \psi_d)(\sum_{d|n} \theta_d)\chi(n)n^{-\rho}e^{-n/X}$$

wählt. In beiden Fällen sieht man jetzt zwar nicht sofort, dass die Ausdrücke (fast) 0 sind (was im Wesentlichen gleichbedeutend damit ist, dass der Beitrag der Terme mit $n > X$ in der Summe aus (3.22) vernachlässigbar ist). Dies folgt aber, wenn die Summen in Integrale umgeschrieben werden. Für die Umschreibung in Integrale verwendet Graham die Perronsche Formel [32, Theorem 5.2] und Heath-Brown die Gleichung [32, Theorem C.4]

$$e^{-1/X} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(s) X^s \, ds. \tag{3.23}$$

Dann kann man mit der Cauchyschen Integralformel zeigen, dass die beiden Ausdrücke gleich $o(1)$ sind für $q \to \infty$, vorausgesetzt X ist groß genug und die Koeffizienten ψ_d und θ_d sind ab einer Stelle identisch 0. Konkret genügt es, wenn für zwei Konstanten $V, W > 1$ (setze $q^v = V$, $q^w = W$)

$$\psi_d = 0 \text{ für } d \geq V, \qquad \theta_d = 0 \text{ für } d \geq W \tag{3.24}$$

und

$$x > v + w + \frac{1}{3} \tag{3.25}$$

gilt.

Um einen „vernünftigen“ Nullstellendetektor zu erhalten müssen nun für ein $U > 1$ (setze $q^u = U$) die Terme mit $1 < n \leq U$ aus der Summe eliminiert werden. Setze also

$$\psi_d = \mu(d) \quad \text{für} \quad 1 \leq d \leq U. \tag{3.26}$$

Weiter kann oBdA angenommen werden, dass

$$\theta_1 = 1. \tag{3.27}$$

Es folgt der Nullstellendetektor (vergleiche [23, (11.9)])

$$1 \leq \left| \sum_{U<n<X\mathscr{L}} (\sum_{d|n} \psi_d)(\sum_{d|n} \theta_d)\chi(n)n^{-\rho}e^{-n/X} \right| + O(\mathscr{L}^{-1}). \tag{3.28}$$

Die implizite Konstante kann dabei von den gewählten Parametern x, v, w und u abhängen. Letztere Ungleichung wird etwas umgeschrieben, mit einem Gewicht $w_\chi \geq 0$ multipliziert und über die verschiedenen Charaktere $\chi^{(k)}$ aufsummiert. Es folgt [23, S.318]

$$\sum_\chi w_\chi \leq (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \sum_\chi \left| \sum_{n=1}^\infty a_{n\chi} b_n \right|^2. \tag{3.29}$$

Dabei haben wir

$$a_{n\chi} = w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n) w_\chi^{\frac{1}{2}} (\sum_{d|n} \theta_d)\chi(n) n^{\frac{1}{2}-\rho(\chi)} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U})^{\frac{1}{2}} \tag{3.30}$$

und

$$b_n = w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n)^{-1} (\sum_{d|n} \psi_d) n^{-\frac{1}{2}} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U})^{\frac{1}{2}} \tag{3.31}$$

gesetzt, wobei $w_0(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ohne Nullstellen sei. In [23, §11] werden die $a_{n\chi}$ und b_n ohne das $w_0(t)$ definiert. Verbesserungspotential 7 [23, S.335] schlägt die Einführung dieses neuen Parameters vor. Die Ungleichung (3.29) gilt gemäß der Herleitung in [23, S.317-318] für alle Koeffizienten θ_d, ψ_d, welche die Bedingungen (3.21), (3.24), (3.25), (3.26) und (3.27) erfüllen.

Um die rechte Seite in (3.29) abzuschätzen, wird in [17] bzw. [23] zunächst das Dualitätsprinzip [26, S.170] verwendet, welches ein Korollar der Cauchy Schwarz Ungleichung ist. Wird letztere Ungleichung direkt benutzt, so folgt mit der Abkürzung $C_\chi = \sum_{n=1}^\infty a_{n\chi} b_n$

$$\begin{aligned}\left(\sum_\chi |C_\chi|^2\right)^2 &\leq \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2\right) \left(\sum_{n=1}^\infty |\sum_\chi a_{n\chi}\overline{C_\chi}|^2\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2\right) \left(\sum_\chi |C_\chi|^2 \sum_{n=1}^\infty |a_{n\chi}|^2 + \sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi\neq\chi'}} \overline{C_\chi} C_{\chi'} \sum_{n=1}^\infty a_{n\chi}\overline{a_{n\chi'}}\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi\neq\chi'}} |\overline{C_\chi} C_{\chi'} w_\chi^{\frac{1}{2}} w_{\chi'}^{\frac{1}{2}}| \leq \left(\sum_\chi |C_\chi| w_\chi^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq \left(\sum_\chi |C_\chi|^2\right)\left(\sum_\chi w_\chi\right)$$

folgt aus (3.29) die folgende Ungleichung, die wir formal notieren, um sie später zitieren zu können.

Lemma 3.7. *Seien positive Zahlen u, v, w und x gegeben, die $u < v$ und (3.25) erfüllen. Weiter seien Koeffizienten ψ_d und θ_d ($d \in \mathbb{N}$) gegeben, die (3.21), (3.24), (3.26) und (3.27) erfüllen. Sei $w_0(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ohne Nullstellen und benutze die Bezeichnungen aus (3.30) und (3.31). Dann gibt es ein q_0, so dass für $q \geq q_0$ und beliebige nicht-negative Gewichte w_χ gilt*

$$\sum_\chi w_\chi \leq (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2\right)\left(\max_\chi \sum_{n=1}^\infty |a_{n\chi}|^2\right)$$
$$+ O\left\{\left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2\right)\left(\max_{\substack{\chi,\chi' \\ \chi\neq\chi'}} \Big|\sum_{n=1}^\infty \frac{a_{n\chi}\overline{a_{n\chi'}}}{w_\chi^{\frac{1}{2}} w_{\chi'}^{\frac{1}{2}}}\Big|\right)\left(\sum_\chi w_\chi\right)\right\}. \quad (3.32)$$

Die Summen bzw. Maxima laufen dabei über die Charaktere $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(N(\lambda_0))}$, welche zu Anfang des Abschnitts definiert wurden.

Es verbleibt die optimale Wahl der Koeffizienten ψ_d und θ_d. Damit die rechte Seite von (3.32) möglichst klein ist, sollten die Ausdrücke (beachte, dass $b_n = 0$ für $1 < n \leq U$ und dass der Ausdruck $e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U}$ sehr klein ist für $n = 1$ und $n > X$)

$$\sum_{n\leq X}\left(\sum_{d|n}\theta_d\right)^2 n^{-1} \quad \text{und} \quad \sum_{U<n\leq X}\left(\sum_{d|n}\psi_d\right)^2 n^{-1}$$

möglichst klein ausfallen. Für θ_d erweist sich die Wahl von

$$\theta_d = \begin{cases} \mu(d)\frac{\log(W/d)}{\log W} & \text{falls } 1 \leq d \leq W, \\ 0 & \text{falls } W \leq d \end{cases} \quad (3.33)$$

als recht optimal (vergleiche [35, S.20-21], [11, S.96f]). Für ψ_d wählen Graham und Heath-Brown

$$\psi_d = \psi_d^{U,V} = \begin{cases} \mu(d) & \text{falls } 1 \leq d \leq U, \\ \mu(d)\frac{\log(V/d)}{\log(V/U)} & \text{falls } U \leq d \leq V, \\ 0 & \text{falls } V \leq d, \end{cases} \quad (3.34)$$

was auch recht optimal ist unter den aufgestellten Bedingungen (vergleiche [2]). Wir werden später die θ_d aus (3.33) wählen, jedoch die Wahl der ψ_d basierend auf (3.34) leicht verbessern. Die Ausführungen in diesem Abschnitt benutzen wir in §5.1.

3.3 Abschätzungen gewisser Suprema

Sei f die Funktion aus (3.17) mit einem $\gamma \geq \frac{1}{2}$ und F die dazugehörige Laplace-Transformierte. Im Zusammenhang mit Verbesserungspotential 2 wird es später nötig sein eine Abschätzung vom Typ

$$A_{sup} = \sup_{\substack{s_1 \in [s_{11}, s_{12}] \\ s_2 \in [s_{21}, s_{22}] \\ s_2 \le s_1,\, t \in \mathbb{R}}} A(s_1, s_2, t) \le C \tag{3.35}$$

mit einer expliziten Konstanten C zu haben. Dabei ist

$$A(s_1, s_2, t) := \Re\Big\{ k_1 F(-s_1 + it) - k_2 F(-(s_1 - s_2) + it) - k_3 F(it) \Big\},$$

k_i und s_{ij} sind Konstanten mit

$$k_i \ge 0, \qquad 0 \le s_{11} \le s_{12} \le 4, \qquad 0 \le s_{21} \le s_{22} \le s_{12}$$

und F ist gegeben durch (3.18). Wir definieren außerdem

$$s_3 := s_1 - s_2 \in \big[\max\{0,\, s_{11} - s_{22}\}, s_{12} - s_{21} \big] =: [s_{31}, s_{32}]. \tag{3.36}$$

Heath-Brown [23, p.312-313] beweist eine Abschätzung der Form (3.35) für ein konkretes F und $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2$, $s_{11} = 0$, $s_{12} = (7/6 + 2\varepsilon)^{-1}$. Für allgemeine Parameter k_i und s_{ij} gehen wir völlig analog vor, wobei wir an manchen Stellen kleine Modifikationen vornehmen, um etwas schärfere Abschätzungen zu erhalten.

Zunächst gilt

$$\Re\{F(z)\} = \Re\{F(\overline{z})\}. \tag{3.37}$$

Damit ist $A(s_1, s_2, t) = A(s_1, s_2, -t)$ und wir können $t \ge 0$ annehmen. Weiterhin gilt

$$A_{sup} \ge 0, \tag{3.38}$$

da für beschränktes σ aus (3.10) folgt, dass

$$\lim_{t \to \infty} \Re\{F(\sigma + it)\} = 0.$$

Diese Konvergenz wird in den Anwendungen später recht schnell ablaufen. Aus diesem Grund macht es Sinn einerseits die Funktion $A(s_1, s_2, t)$ für große t, sagen wir $t \ge x_1$, mit groben Mitteln abzuschätzen. Für kleine $t \in [0, x_1]$ geht man dann präzise vor, indem $A(s_1, s_2, t)$ konkret an sehr vielen Gitterpunkten der Menge $[s_{11}, s_{12}] \times [s_{21}, s_{22}] \times [0, x_1]$ ausgewertet wird. Es ergibt sich dann eine Abschätzung, wenn das Maximum der Werte in den Gitterpunkten genommen wird und dazu ein Fehlerterm addiert wird, der aus der Größe der partiellen Ableitungen von A resultiert. Wir beginnen mit der

Abschätzung für $t \ge x_1$

Da f Bedingung 2 erfüllt und $k_3 \ge 0$, gilt

$$\begin{aligned} &\Re\Big\{ k_1 F(-s_1 + it) - k_2 F(-(s_1 - s_2) + it) - k_3 F(it) \Big\} \\ &\qquad\qquad \le \Re\big\{ k_1 F(-s_1 + it) - k_2 F(-s_3 + it) \big\} =: \widetilde{A}(s_1, s_3, t). \end{aligned}$$

Wir schätzen $\widetilde{A}(s_1, s_3, t)$ für $t \ge x_1 > 0$ nach oben ab. Für $z \ne 0$ gilt nach (3.18)

$$F(z) = \frac{16\gamma^5}{15} z^{-1} - \frac{8\gamma^3}{3} z^{-3} + 4\gamma^2 (1 + e^{-2\gamma z}) z^{-4} + 4 z^{-6} \left(-1 + e^{-2\gamma z} + 2\gamma z e^{-2\gamma z} \right). \tag{3.39}$$

Setze

$$\widetilde{A}(s_1, s_3, t) = \widetilde{A_1}(s_1, s_3, t) + \widetilde{A_2}(s_1, s_3, t) + \widetilde{A_3}(s_1, s_3, t) + \widetilde{A_4}(s_1, s_3, t)$$

gemäß den vier Termen in (3.39). Beispielsweise ist

$$\widetilde{A_3}(s_1, s_3, t) = \Re\Big\{4k_1\gamma^2(1 + e^{-2\gamma(-s_1+it)})(-s_1 + it)^{-4} - 4k_2\gamma^2(1 + e^{-2\gamma(-s_3+it)})(-s_3 + it)^{-4}\Big\}.$$

Um die einzelnen $\widetilde{A_i}(s_1, s_3, t)$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$ leichter abschätzen zu können, setzen wir voraus, dass

$$t \geq x_1 \geq 4. \tag{3.40}$$

Wegen $\max\{s_{12}, s_{32}\} \leq 4 \leq t$ ist $s_i/(s_i^2 + t^2)$ monoton wachsend in s_i $(i \in \{1, 3\})$. Aus

$$\Re\left\{(-s_i + it)^{-1}\right\} = \frac{-s_i}{s_i^2 + t^2}$$

folgt dann

$$\widetilde{A_1}(s_1, s_3, t) \leq \frac{16\gamma^5}{15} \cdot \frac{t^2 \max\{0,\ s_{32}k_2 - s_{11}k_1\}}{(s_{32}^2 + t^2)(s_{11}^2 + t^2)} + \frac{16\gamma^5}{15} \cdot \frac{s_{11}s_{32} \max\{0,\ s_{11}k_2 - s_{32}k_1\}}{(s_{32}^2 + t^2)(s_{11}^2 + t^2)} =: A_1(t). \tag{3.41}$$

Es gilt $3t^2 - s_i^2 \geq 0$ $(i \in \{1, 3\})$. Zusammen mit

$$\Re\left\{(-s_i + it)^{-3}\right\} = \frac{s_i(3t^2 - s_i^2)}{(s_i^2 + t^2)^3}$$

folgt

$$\widetilde{A_2}(s_1, s_3, t) \leq \frac{8\gamma^3 k_2 s_{32} t^2}{(s_{31}^2 + t^2)^3} =: A_2(t). \tag{3.42}$$

Der Ausdruck $(1 + e^{2\gamma s})/(s^2 + t^2)^2$ ist monoton wachsend in s, da $\gamma \geq \frac{1}{2}$ und $t \geq 4$. Durch triviales Abschätzen folgt dann

$$|\widetilde{A_3}(s_1, s_3, t)| \leq 4\gamma^2 k_1 \frac{(1 + e^{2\gamma s_{12}})}{(s_{12}^2 + t^2)^2} + 4\gamma^2 k_2 \frac{(1 + e^{2\gamma s_{32}})}{(s_{32}^2 + t^2)^2} =: A_3(t). \tag{3.43}$$

Damit verbleibt noch die Abschätzung von $\widetilde{A_4}$. Auf Grund der hohen negativen Potenz z^{-6} genügt es diesen Term gänzlich trivial abzuschätzen:

$$|\widetilde{A_4}(s_1, s_3, t)| \leq 4k_1 \frac{1 + e^{2\gamma s_{12}} + 2\gamma e^{2\gamma s_{12}} \sqrt{s_{12}^2 + t^2}}{t^6} + 4k_2 \frac{1 + e^{2\gamma s_{32}} + 2\gamma e^{2\gamma s_{32}} \sqrt{s_{32}^2 + t^2}}{t^6} =: A_4(t). \tag{3.44}$$

Die oberen Abschätzungen $A_i(t)$ sind als Summen und Produkte monoton fallender Funktionen auch monoton fallend in t. Es folgt

Lemma 3.8. *Es gelten die Voraussetzungen, die zu Beginn dieses Abschnitts gemacht wurden, sowie die weiter oben definierten Bezeichnungen. Sei $\gamma \geq \frac{1}{2}$ und $t \geq x_1 \geq 4$. Dann gilt*

$$A(s_1, s_2, t) \leq A_1(x_1) + A_2(x_1) + A_3(x_1) + A_4(x_1).$$

Abschätzung für kleine $t \in [0, x_1]$

Der Einfachheit halber werden wir nicht die zusätzliche Voraussetzung $s_2 \leq s_1$ verwenden. Seien Δ_1, Δ_2, Δ_t und x_1 beliebige positive Konstanten. Definiere ein Gitter

$$G \subseteq M = [s_{11}, s_{12}] \times [s_{21}, s_{22}] \times [0, x_1]$$

durch

$$\begin{aligned} G = \Big\{ (s_1, s_2, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s_1 = \min\{s_{11} + j_1\Delta_1, s_{12}\};\ j_1 = 0, \ldots, \left[\frac{s_{12} - s_{11}}{\Delta_1}\right] + 1, \\ s_2 = \min\{s_{21} + j_2\Delta_2, s_{22}\};\ j_2 = 0, \ldots, \left[\frac{s_{22} - s_{21}}{\Delta_2}\right] + 1, \\ t = \min\{j_3\Delta_t, x_1\};\ j_3 = 0, \ldots, \left[\frac{x_1}{\Delta_t}\right] + 1 \Big\} \end{aligned} \tag{3.45}$$

und setze

$$A_G = \max_{(s_1,s_2,t)\in G} A(s_1, s_2, t). \tag{3.46}$$

Im Falle von $s_{i1} = s_{i2}$ für ein $i \in \{1, 2\}$ lassen wir auch $\Delta_i = 0$ zu, wobei wir dann in der Definition des Gitters den Ausdruck

$$\left[\frac{s_{i2} - s_{i1}}{\Delta_i}\right] + 1$$

durch 0 ersetzen.

Die Funktion $A(s_1, s_2, t)$ ist in M nach allen drei Variablen differenzierbar. Sei B_1 bzw. B_2 bzw. B_3 eine obere Schranke für den Betrag der partiellen Ableitung nach s_1 bzw. s_2 bzw. t von $A(s_1, s_2, t)$ in M. Sei nun $(s_1, s_2, t) \in M$ beliebig gewählt und fest. Das Gitter G ist gerade so konstruiert, dass es dann ein $(a, b, c) \in G$ gibt mit

$$|s_1 - a| \leq \frac{\Delta_1}{2}, \quad |s_2 - b| \leq \frac{\Delta_2}{2}, \quad |t - c| \leq \frac{\Delta_t}{2}.$$

Zusammen mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt

$$\begin{aligned} |A(s_1, s_2, t) - A(a, b, c)| &\leq |A(s_1, s_2, t) - A(a, b, t)| + |A(a, b, t) - A(a, b, c)| \\ &\leq |A(s_1, s_2, t) - A(a, s_2, t)| + |A(a, s_2, t) - A(a, b, t)| + |A(a, b, t) - A(a, b, c)| \\ &\leq \frac{\Delta_1}{2} B_1 + \frac{\Delta_2}{2} B_2 + \frac{\Delta_t}{2} B_3. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\sup_{(s_1,s_2,t)\in M} A(s_1, s_2, t) \leq A_G + \frac{\Delta_1}{2} B_1 + \frac{\Delta_2}{2} B_2 + \frac{\Delta_t}{2} B_3.$$

Es verbleibt die Abschätzung der B_i. Aus der Definition der Laplace-Transformierten F von f folgt sofort

$$A(s_1, s_2, t) = \int_0^{2\gamma} f(x) \cos(tx) e^{s_1 x} (k_1 - k_2 e^{-s_2 x})\, dx - k_3 \int_0^{2\gamma} f(x) \cos(tx)\, dx.$$

Da die Funktionen im Inneren der Integrale (abhängig von den beiden Variablen t, x bzw. s_1, x

bzw. $s_2, x)$ stetig sind, können wir unter dem Integral differenzieren und erhalten für $(s_1, s_2, t) \in M$

$$\left|\frac{dA(s_1,s_2,t)}{ds_1}\right| \leq d_0 \int_0^{2\gamma} x f(x) e^{s_{12}x}\, dx =: B_1, \tag{3.47}$$

$$\left|\frac{dA(s_1,s_2,t)}{ds_2}\right| \leq k_2 \int_0^{2\gamma} x f(x) e^{s_{32}x}\, dx =: B_2, \tag{3.48}$$

und

$$\left|\frac{dA(s_1,s_2,t)}{dt}\right| \leq d_0 \int_0^{2\gamma} x f(x) e^{s_{12}x}\, dx + k_3 \int_0^{2\gamma} x f(x)\, dx =: B_3, \tag{3.49}$$

wobei

$$d_0 = \sup_{x\in[0,2\gamma]} |k_1 - k_2 e^{-s_2 x}|.$$

Da

$$h(x) = k_1 - k_2 e^{-s_2 x}$$

monoton in x ist, nimmt $|h(x)|$ sein Supremum in $[0, 2\gamma]$ an einem der beiden Randpunkte $x = 0$ oder $x = 2\gamma$ an. Es folgt

$$\begin{aligned} d_0 &= \max\{|k_1 - k_2|, |k_1 - k_2 e^{-2s_{22}\gamma}|\} \\ &= \max\{k_2 - k_1, k_1 - k_2 e^{-2s_{22}\gamma}\}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Zusammen mit Lemma 3.8 folgt insgesamt

Lemma 3.9. *Seien s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} und k_i $(i \in \{1,2,3\})$ nicht-negative Konstanten und γ, Δ_1, Δ_2, Δ_t und x_1 positive Konstanten mit*

$$s_{11} \leq s_{12} \leq 4, \quad s_{21} \leq s_{22} \leq s_{12}, \quad \gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x_1 \geq 4.$$

Ist $s_{i1} = s_{i2}$ für ein $i \in \{1,2\}$ dann ist $\Delta_i = 0$ auch zulässig. Mit den Notationen aus (3.35), (3.36), (3.39) und (3.41)-(3.50) gilt

$$A_{sup} \leq \max\left\{A_1(x_1) + A_2(x_1) + A_3(x_1) + A_4(x_1), A_G + \frac{\Delta_1}{2}B_1 + \frac{\Delta_2}{2}B_2 + \frac{\Delta_t}{2}B_3.\right\}$$

Für die konkrete Berechnung verbleibt noch die Wahl der Parameter x_1, Δ_1, Δ_2 und Δ_t, so dass A_{sup} bei geringem Rechenaufwand möglichst gut abgeschätzt wird. Die Abschätzung in letzterem Lemma wird dabei umso „schärfer", je größer das x_1 gewählt wird und je kleiner die Parameter Δ_1, Δ_2 und Δ_t gewählt werden. Die Parameter sollten dabei vorzugsweise so gewählt werden, dass

$$B_1\Delta_1 \approx B_2\Delta_2 \approx B_3\Delta_t.$$

Dadurch wird die Anzahl der Rechenschritte (= Anzahl der Gitterpunkte $\approx C_1(\Delta_1\Delta_2\Delta_t)^{-1}$) bei fast gleichbleibender Abschätzung minimiert: Dies kann in die Analysisaufgabe übersetzt werden, die Funktion $h(x,y,z) = C_1(xyz)^{-1}$ unter der Nebenbedingung $x + y + z = C_2$ zu minimieren.

3.4 Beweis des Linnikschen Theorems

Ein faszinierender Aspekt der analytischen Zahlentheorie ist die Tatsache, dass „diskrete" Phänomene, wie die natürlichen Zahlen und spezieller die Primzahlen, mit „kontinuierlichen" Funktionen behandelt werden können. Wir stellen hier den Zusammenhang zwischen den Primzahlen in arithmetischen Progressionen und den Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen dar. Dies wird in drei wesentlichen Schritten geschehen. Wir folgen dabei präzise dem Vorgehen in [23, §13], werden jedoch am Ende des Abschnitts eine etwas andere Darstellung wählen, da wir später das Vorgehen etwas variieren. Wir fügen - bis auf eine Ausnahme - keine Beweise ein, sondern zitieren und kommentieren nur die wichtigen Zwischenergebnisse.

Seien a, $q \in \mathbb{N}$ und $(a,q)=1$. Betrachte die Summe

$$\Sigma = \sum_{p \equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p} h(\mathscr{L}^{-1} \log p),$$

wobei das Gewicht $h(t)$ definiert ist als

$$h(t) = h_{L,K}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq L-2K, \\ t-(L-2K) & \text{falls } L-2K \leq t \leq L-K, \\ L-t & \text{falls } L-K \leq t \leq L, \\ 0 & \text{falls } t \geq L \end{cases} \tag{3.51}$$

mit positiven Konstanten L, K und $L-2K>0$. Wir müssen zeigen, dass für $q \geq q_0$ die Summe Σ unabhängig vom gewählten a positiv ist. Daraus folgt $P(q) \leq q^L$ für $q \geq q_0$ und daraus wiederum

$$P(q) \leq \Big(\max_{r \leq q_0} P(r)\Big) q^L$$

für alle q.

Um mit der Summe Σ besser arbeiten zu können, ist es vorteilhaft sie über die Primzahlpotenzen gehen zu lassen, anstatt nur über die Primzahlen:

$$\Sigma = \sum_{n \equiv a \pmod q} \frac{\Lambda(n)}{n} h(\mathscr{L}^{-1} \log n) + O(q^{-\frac{L-2K}{2}}).$$

Nun kommt der erste wesentliche Schritt, nämlich die Einführung der Charaktere χ, wodurch man die Summation über eine einzige Restklasse $a \pmod q$ in den Griff bekommt. Dies geht zurück auf Dirichlet. Man benutzt für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a)\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv a \pmod q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\Sigma = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod q} \overline{\chi}(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n} h(\mathscr{L}^{-1} \log n) + O(q^{-\frac{L-2K}{2}}). \tag{3.52}$$

Der zweite wesentliche Schritt ist die Umschreibung der inneren Summen aus (3.52) in komplexe Linienintegrale. Dies ist der eigentliche (und einzige) Moment, in dem die Verbindung von der Zahlentheorie zur Funktionentheorie hergestellt wird. Bekanntlich gilt es sehr oft, dass die Verbindung dadurch hergestellt wird, dass Summen als komplexe Linienintegrale geschrieben werden. Das klassischste Beispiel hierfür ist wohl die Perronsche Formel, aus der eine Summe $\sum_{n \leq x} a(n)$ leicht in Zusammenhang gesetzt werden kann mit der zugehörigen Dirichletschen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s},$$

ohne dass letztere in $s=0$ konvergieren muss (vergleiche [3, S.26f]).

Man ersetzt nun in der inneren Summe von (3.52) den Charakter χ durch den primitiven

Charakter $\chi^\star$, der χ induziert. Dies wird gemacht, da die gleich in Erscheinung tretenden Funktionen $(L'/L)(s,\chi)$ für primitives χ besser gehandhabt werden können. Für $\chi \neq \chi_0$ folgt

$$\mathscr{L}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\chi^\star(n)h(\mathscr{L}^{-1}\log n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi^\star)\right)H((1-s)\mathscr{L})\,ds, \tag{3.53}$$

wobei $H = H_{L,K}$ die Laplace-Transformierte von $h = h_{L,K}$ sei. Es ist

$$H_{L,K}(z) = e^{-(L-2K)z}\left(\frac{1-e^{-Kz}}{z}\right)^2. \tag{3.54}$$

Weiterhin gilt für $\chi = \chi_0$, dass $\chi^\star$ immer 1 ist, also

$$\mathscr{L}^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n}\chi^\star(n)h(\mathscr{L}^{-1}\log n) = H(0) + O(\mathscr{L}^{-1}). \tag{3.55}$$

Letzteres wird mit partieller Summation und dem Primzahlsatz bewiesen.

Werden (3.52), (3.53) und (3.55) kombiniert, so ist Σ durch die Kombination verschiedener recht kompliziert aussehender Terme ersetzt worden. Bisher ist auch noch nichts gewonnen, da die Integranden wegen des Verhaltens von $H((1-s)\mathscr{L})$ auf $\Re\{s\} = 2$ keineswegs vernünftig abgeschätzt werden können.

Damit kämen wir zum dritten Schritt. Bei den $\varphi(q)-1$ Integralen verschiebt man die Integrationslinie von $\Re\{s\} = 2$ auf $\Re\{s\} = -\frac{1}{2}$. Mit dem Residuensatz und leichter Abschätzung des verschobenen Integrals kann das anfängliche Integral durch eine gewichtete Summe über die nicht-trivialen Nullstellen von $L(s,\chi^\star)$ ersetzt werden. Diese sind die selben, wie die nicht-trivialen Nullstellen von $L(s,\chi)$. Man ist am Ziel und hat damit Σ mit Hilfe der Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen abgeschätzt. Ist $L > 2K+2$ so gilt [23, S.325, 2.Zeile]:

$$\Sigma = \frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)}\left(H(0) - \sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(a)\sum_{\rho}H((1-\rho)\mathscr{L}) + O(\mathscr{L}^{-1})\right). \tag{3.56}$$

Die Gleichung (3.56) gilt für ein $h = h_{L,K}$ und die dazugehörige Laplace-Transformierte $H = H_{L,K}$. Wir benutzen ab jetzt anstelle von $h = h_{L,K}$ die Linearkombination

$$h(t) = \sum_{i=1}^{M}\alpha_i h_{L_i,K_i}(t)$$

mit entsprechender Laplace-Transformierten $H(z)$ - dabei ist $M \in \mathbb{N}$, $L_i, K_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$ und $L_i > 2K_i + 2$. Offensichtlich gilt (3.56) auch für dieses neue h und H.

Nun hat $H(z)$ eine solche Gestalt, dass in der inneren Summe aus (3.56) der Beitrag der Nullstellen, die zu weit weg von $s = 1$ sind, extrem gering ist. Mit der Abschätzung [23, (1.4)] für die Nullstellendichte der Dirichletschen L-Funktionen wird in der Deduktion von [23, Lemma 13.2] aus [23, Lemma 13.1] gezeigt, dass die meisten Nullstellen nur einen vernachlässigbaren Beitrag liefern und deswegen weggelassen werden können. Genauer folgt für feste $\varepsilon > 0$ und $L_i > 2K_i + 3$ $(i = 1,\ldots,M)$, dass es positive Konstanten $C_0 = C_0(\varepsilon)$ und $q_0 = q_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für $q \geq q_0$ gilt (vergleiche [23, Lemma 13.2])

$$\Sigma \geq \frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)}\left(H(0) - \sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{\rho}{}'|H((1-\rho)\mathscr{L})| - \varepsilon\right). \tag{3.57}$$

Die Summe $\sum_\rho{}'$ geht dabei über die Nullstellen $\rho = \beta + i\gamma$ von $L(s,\chi)$ im Viereck

$$1 - \mathscr{L}^{-1}C_0 \leq \beta \leq 1, \qquad |\gamma| \leq \mathscr{L}^{-1}C_0. \tag{3.58}$$

Nun schätzt Heath-Brown die Summe über die Nullstellen für ein $\chi \neq \chi_0$ durch eine interessante Anwendung von [23, Lemma 5.2] und [23, Lemma 5.3] ab. Da wir allgemeinere Funktionen h verwenden als Heath-Brown, benötigen wir die folgende Verallgemeinerung von [23, Lemma 13.3].

Lemma 3.10 (vergleiche Lemma 13.3 von [23])**.** *Wir benutzen das C_0 aus (3.58). Seien $\varepsilon, \lambda_{11} > 0$, $\lambda \in (\lambda_{11}, C_0]$, $M \in \mathbb{N}$ und $f_{1i}^\lambda(t)$ $(i = 1, \ldots, M)$ Funktionen, die jeweils die Bedingung 1 erfüllen für ein $x_{0i} > 0$. Für alle $i \in \{1, \ldots, M\}$ seien die Ausdrücke*

$$x_{0i}, \quad x_{0i}^{-1}, \quad \sup_{t\in[0,\infty)} |f_{1i}(t)|, \quad \sup_{t\in(0,x_{0i})} \{|(f_{1i}^\lambda)'(t)| + |(f_{1i}^\lambda)''(t)|\}$$

nach oben beschränkt durch eine positive Konstante C_1, welche nur von λ_{11} und C_0 abhängt. Die Funktion

$$f_1^\lambda(t) = \sum_{i=1}^{M} f_{1i}^\lambda(t)$$

sei nicht-negativ. Sei $H_2(z)$ eine in $\Re\{z\} \geq 0$ holomorphe Funktion und für die Laplace-Transformierte $F_1^\lambda(z)$ von $f_1^\lambda(t)$ gelte

$$|H_2(\lambda + it)| \leq \Re\{F_1^\lambda(it)\} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.59}$$

Weiterhin gelte, dass $H_2(z)$ und $F_1^\lambda(z)$ für $\Re\{z\} \geq 0$ und $|z| \to \infty$ beide gleichmäßig gegen 0 gehen. Sei schließlich $\chi \neq \chi_0$ ein Charakter $\pmod q$ und $L(s,\chi)$ habe keine Nullstellen im Rechteck

$$1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda < \beta \leq 1, \quad |\gamma| \leq 1.$$

Dann gibt es eine effektiv berechenbare Konstante q_0, abhängig von ε, M, λ_{11} und C_0, aber nicht von λ, so dass für $q \geq q_0$

$$\sum_\rho{}' |H_2((1-\rho)\mathscr{L})| \leq F_1^\lambda(-\lambda) + \frac{f_1^\lambda(0)}{6} + \varepsilon, \tag{3.60}$$

wobei die Summation über die Nullstellen von $L(s,\chi)$ in (3.58) läuft.

Beweis. Der Beweis läuft analog zur Herleitung von [23, Lemma 13.3]. Setze $s = 1 - \lambda\mathscr{L}^{-1}$. Wir lassen das λ in den Funktionsbezeichnungen weg. Mit Lemma 3.5, Lemma 3.2, $f_1(t) \geq 0$

und Lemma 3.1 folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\rho}{}' |H_2((1-\rho)\mathscr{L})| &\leq \sum_{\rho}{}' \Re\{F_1((s-\rho)\mathscr{L})\} \\
&= \sum_{i\leq M} \sum_{\rho}{}' \Re\{F_{1i}((s-\rho)\mathscr{L})\} \\
&\leq \sum_{i\leq M} \left(\frac{f_{1i}(0)}{6} - \mathscr{L}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re\left\{ \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} f_{1i}(\mathscr{L}^{-1}\log n) \right) + \varepsilon \\
&= \frac{f_1(0)}{6} - \mathscr{L}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re\left\{ \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} f_1(\mathscr{L}^{-1}\log n) + \varepsilon \\
&\leq \frac{f_1(0)}{6} + \mathscr{L}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{\chi_0(n)}{n^s} f_1(\mathscr{L}^{-1}\log n) + \varepsilon \\
&= \frac{f_1(0)}{6} + \mathscr{L}^{-1} \sum_{i\leq M} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{\chi_0(n)}{n^s} f_{1i}(\mathscr{L}^{-1}\log n) + \varepsilon \\
&\leq \frac{f_1(0)}{6} + F_1(-\lambda) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Das δ und q_0 aus Lemma 3.2 und die implizite Konstante im Restterm von Lemma 3.1 sind nur von ε und einer oberen Schranke der Ausdrücke

$$x_0, \quad x_0^{-1}, \quad \sup_{t\in[0,\infty)} |f(t)|, \quad \sup_{t\in(0,x_0)} \{|f'(t)| + |f''(t)|\}$$

abhängig. Es folgt, dass unser jetziges q_0 nur von ε, M, λ_{11} und C_0 abhängt. Diese Zusatzüberlegung (wegen der man wieder einen Blick in die Beweise der verwendeten Lemmata werfen muss) geschieht deswegen, weil dieses Lemma später für beliebiges $\lambda \in (0.348, C_0]$ benutzt werden wird. □

Bemerkung. Die Beschränktheit von $|f_{1i}(t)|$ und der ersten Ableitung $|f_{1i}'(t)|$ folgt im Übrigen bereits aus der Beschränktheit der Terme $f_{1i}(0)$, x_{0i} und x_{0i}^{-1}.

Bemerkung. Mit Hilfe von Prinzip 3 aus §2.2 und (3.57) können wir das Theorem von Linnik für hinreichend großes L bereits jetzt schon beweisen. Wir wählen $h = h_{L,K}$ für noch zu bestimmende Konstanten L und K.

Wenn ρ_1 nicht existiert, d.h. in R hat die Funktion aus (3.11) keine Nullstellen, dann erhalten wir sofort nach Wahl eines hinreichend kleinen $K > 0$ die zulässige Konstante $L = 3 + \varepsilon$ (bzw. sogar $L = 2.4 + \varepsilon$, wenn wir etwas genauer vorgegangen wären). Wenn andererseits ρ_1 existiert und sehr nah bei $s = 1$ liegt, nämlich $\lambda_1 \leq \lambda(\varepsilon)$ für ein gewisses hinreichend kleines $\lambda(\varepsilon) > 0$, dann können wir wieder $L = 3 + \varepsilon$ wählen nach [22]. Also sei $\lambda_1 \geq \lambda(\varepsilon)$. Es folgt mit der für alle $z \in \mathbb{C}$ gültigen Abschätzung

$$|H(z)| \leq H(\Re\{z\})$$

und Prinzip 3, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(q)}{\mathscr{L}} \Sigma \geq& H(0) - \sum_{\chi \pmod q} N(1 - C_0\mathscr{L}^{-1}, 1, \chi)\, H((1 - (1 - \lambda(\varepsilon)\mathscr{L}^{-1})\mathscr{L}) - \varepsilon \\
\geq& K^2 - c_3 e^{c_4 C_0} H(\lambda(\varepsilon)) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nun sind $\lambda(\varepsilon)$, c_3, c_4 und C_0 feste positive Zahlen. Wird also $K = 2$ und $\varepsilon = 1$ gewählt, dann folgt wegen

$$\lim_{L\to\infty} H(\lambda(\varepsilon)) = 0$$

für hinreichend großes L die Behauptung.

Um einen besseren zulässigen Wert für L zu beweisen, sind offensichtlich Aussagen zu der Lage der Nullstellen nahe $s = 1$ (nullstellenfreie Regionen) und Abschätzungen zu der Anzahl derselbigen (Nullstellendichte) hilfreich.

Kapitel 4

Nullstellenfreie Regionen

Wir benutzen die in §3.1.2 eingeführten Notationen. Sei $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'\}$. Das Ziel in diesem Kapitel ist der Beweis von Abschätzungen

$$\lambda_1 \leq C_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq C_2 \tag{4.1}$$

für positive Konstanten C_1 und C_2. Daraus folgen dann nullstellenfreie Regionen (im Fall $\lambda = \lambda_1$) oder fast nullstellenfreie Regionen (in den anderen Fällen) für die Funktion aus (3.11).

4.1 λ'-Abschätzungen

Für diesen Abschnitt setzen wir voraus, dass mindestens eines der beiden Elemente χ_1, ρ_1 komplex ist. Weiterhin setzen wir voraus, dass eine Funktion f gegeben ist, die Bedingung 1 und 2 erfüllt. Am Ende wird dies die Funktion aus (3.17) sein.

In diesem Abschnitt verbessern wir [23, Table 8 (§9)] mit Hilfe von Verbesserungspotential 2. Wir sollten noch erwähnen, dass für den Beweis der letztendlich zulässigen Linnikschen Konstante L das Einbringen der hier verbesserten λ'-Abschätzungen vergleichsweise wenig Beitrag liefert. Der eigentliche Vorteil liegt darin, dass wir diese später verwenden können zur Herleitung der wichtigen λ_2-Abschätzungen.

Wir beginnen mit der Ungleichung in [23, S.302 oben], also

$$\begin{aligned}
0 \leq{}& \chi_0(n)\left(1+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma'}}\right\}\right)\left(k+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}\right)^2 \\
={}&(k^2+\frac{1}{2})\left(\chi_0(n)+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma'}}\right\}\right) \\
&+k\left(\Re\left\{\frac{\chi_0(n)}{n^{i(\gamma_1-\gamma')}}\right\}+2\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)^2}{n^{i(\gamma_1+\gamma')}}\right\}\right) \\
&+\frac{1}{4}\left(\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i(2\gamma_1-\gamma')}}\right\}+2\Re\left\{\frac{\chi_1(n)^2}{n^{2i\gamma_1}}\right\}+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)^3}{n^{i(2\gamma_1+\gamma')}}\right\}\right),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei $k \geq 0$ eine später zu wählende Konstante sei. Während Heath-Brown jetzt mit der in §3.1.1 kurz erwähnten „ersten Methode“ weitermacht, verwenden wir die „zweite Methode“ mit den Lemmata 3.1 und 3.4. Das Problem bei letzterer Methode ist, dass die resultierenden Ungleichungen Terme der Form

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{k_1F(-s_1+it)-k_2F(-s_3+it)-k_3F(it)\big\}$$

beinhalten können. Verbesserungspotential 2 [23, S.332] liegt nun darin sich von solchen Termen nicht abschrecken zu lassen, sondern sie konsequent und genau abzuschätzen gemäß §3.3.

Sei $\lambda^\star > 0$ mit

$$\lambda^\star \leq \min\{\lambda_2, \lambda'\}. \tag{4.3}$$

Im Falle, dass ρ_2 nicht existiert, setzen wir nur $\lambda^\star \leq \lambda'$ voraus. Wird

$$\beta^\star = 1 - \lambda^\star \mathscr{L}^{-1}$$

gesetzt, so folgt aus (4.2) die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq &(k^2 + \frac{1}{2})K(\beta^\star, \chi_0) + (k^2 + \frac{1}{2})K(\beta^\star + i\gamma', \chi_1) \\ &+ kK(\beta^\star + i(\gamma_1 - \gamma'), \chi_0) + 2kK(\beta^\star + i\gamma_1, \chi_1) + kK(\beta^\star + i(\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^2) \\ &+ \frac{1}{4}K(\beta^\star + i(2\gamma_1 - \gamma'), \chi_1) + \frac{1}{2}K(\beta^\star + 2i\gamma_1, \chi_1^2) + \frac{1}{4}K(\beta^\star + i(2\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^3), \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei

$$K(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re \left\{ \frac{\chi(n)}{n^s} \right\} f(\mathscr{L}^{-1} \log n).$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Zuerst zu

4.1.1 Fall 1: $\operatorname{ord} \chi_1 \geq 5$

Lemma 4.1. *Sei* $\operatorname{ord} \chi_1 \geq 5$ *und* f *eine Funktion, die Bedingung 1 und 2 erfüllt. Weiterhin sei* $\lambda^\star$ *eine Konstante mit* $0 < \lambda^\star \leq \min\{\lambda', \lambda_2\}$. *Wenn* ρ_2 *nicht existiert, so setzen wir nur* $0 < \lambda^\star \leq \lambda'$ *voraus*[1]. *Seien ferner* k *und* ε *positive Konstanten. Dann gilt für* $q \geq q_0(f, k, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} 0 \leq (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda^\star) - F(\lambda' - \lambda^\star)) - 2kF(\lambda_1 - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 3k + \frac{3}{2}) + \varepsilon \\ + \sup_{t \in \mathbb{R}} \Re \left\{ kF(-\lambda^\star + it) - (k^2 + \frac{3}{4})F(\lambda_1 - \lambda^\star + it) \right\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Beweis. Wir beginnen mit der Ungleichung (4.4). In dieser schätzen wir die acht verschiedenen „K-Terme“ mit Hilfe der Lemmata 3.1 und 3.4 ab. Zuerst bekommen wir mit Lemma 3.1 die Ungleichungen

$$(k^2 + \frac{1}{2})\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star, \chi_0) \leq (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda^\star) + \varepsilon), \tag{4.6}$$

$$k\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i(\gamma_1 - \gamma'), \chi_0) \leq k(\Re\{F(-\lambda^\star + i(\mu_1 - \mu'))\} + \varepsilon). \tag{4.7}$$

Wegen der Voraussetzung $\operatorname{ord} \chi_1 \geq 5$ gilt $\chi_1^2 \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1}$. Letztere Schreibweise verwenden wir als Synonym für $\chi_1^2 \notin \{\chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1}\}$. Da $\chi_1^2 \neq \chi_0$ können wir zur Abschätzung des Terms $K(\beta^\star + i(\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^2)$ das Lemma 3.4 verwenden. Betrachte für diesen Fall - also

$$s = \beta^\star + i(\gamma_1 + \gamma') \in R(2l) \subseteq R(9l)$$

[1] Die Werte λ' und λ_2 sind abhängig von q. Insofern muss eigentlich spezifiziert werden für welche q die Ungleichung $0 < \lambda^\star \leq \min\{\lambda', \lambda_2\}$ gelten soll. Dies ist aber aus dem Zusammenhang klar. Wir möchten es an dieser Stelle präzise formulieren: Für dieses Lemma beispielsweise geben wir uns anfangs ein beliebiges $q \in \mathbb{N}$ vor und halten dies fest. Für dieses spezielle q soll die genannte Ungleichung gelten. Unter den sonstigen genannten Voraussetzungen folgt die Aussage (4.5) für dieses q, falls $q \geq q_0(f, k, \varepsilon)$. Diese Bemerkung findet auch in späteren Abschnitten Anwendung.

und $\chi = \chi_1^2$ - die beiden Mengen A_1 und A_2 aus Lemma 3.4. Wegen $\chi_1^2 \neq \chi_1, \overline{\chi_1}$ und $\beta^\star \geq \Re\{\rho_2\}$ folgt aus (3.12), dass $A_1 = \emptyset$. Falls ρ_2 nicht existiert, kann genauso geschlossen werden. Da wir außerdem keine weiteren Informationen zu dem Charakter χ_1^2 bzw. den Nullstellen von $L(s, \chi_1^2)$ in R haben, wählen wir $A_2 = \emptyset$. Das Lemma liefert also mit $\phi(\chi_1^2) \leq \frac{1}{3}$

$$k\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i(\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^2) \leq k(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon). \tag{4.8}$$

Völlig analog folgen

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + 2i\gamma_1, \chi_1^2) \leq \frac{1}{2}(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon) \tag{4.9}$$

und

$$\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i(2\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^3) \leq \frac{1}{4}(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon). \tag{4.10}$$

Zur Abschätzung von $K(\beta^\star + i\gamma', \chi_1)$ benutzen wir wieder Lemma 3.4. Diesmal hat jedoch die Funktion $L(s, \chi_1)$ die Nullstelle ρ_1, für die durchaus gelten kann, dass $\beta^\star < \Re\{\rho_1\}$. Ist dies der Fall, so folgt unter Berücksichtigung von $\beta^\star \geq \Re\{\rho'\}$, dass $A_1 = \{\rho_1\}$. Zusätzlich wählen wir dann $A_2 = \{\rho'\}$. Ist jedoch $\Re\{\rho_1\} \leq \beta^\star$, so ist $A_1 = \emptyset$ und wir wählen $A_2 = \{\rho_1, \rho'\}$. In beiden Fällen ist also $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1, \rho'\}$ und wir bekommen

$$\begin{aligned}(k^2 + \frac{1}{2})&\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i\gamma', \chi_1)\\ &\leq (k^2 + \frac{1}{2})(-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(\mu' - \mu_1))\} - F(\lambda' - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6} + \varepsilon).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Für die Abschätzung der beiden verbliebenen Terme $K(\beta^\star + i\gamma_1, \chi_1)$ und $K(\beta^\star + i(2\gamma_1 - \gamma'), \chi_1)$ benutzen wir die Nullstelle ρ' nicht. Wir wählen also A_2 in Lemma 3.4 so, dass $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1\}$ und es folgt

$$2k\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i\gamma_1, \chi_1) \leq 2k(-F(\lambda_1 - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6} + \varepsilon) \tag{4.12}$$

und

$$\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}K(\beta^\star + i(2\gamma_1 - \gamma'), \chi_1) \leq \frac{1}{4}(-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(\mu_1 - \mu'))\} + \frac{f(0)}{6} + \varepsilon). \tag{4.13}$$

Schließlich folgt noch aus (3.37), dass

$$\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(\mu' - \mu_1))\} = \Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(\mu_1 - \mu'))\}.$$

Dies verwenden wir in (4.11). Werden nun in (4.4) die Abschätzungen (4.6)-(4.13) eingespeist, dann folgt das Lemma. $\square$

Das nächste Mal, wenn wir mit Hilfe von Lemma 3.4 einen „K-Term" abschätzen, werden wir nur angeben, welche Nullstellen ρ wir berücksichtigen (müssen). Wir werden also die Menge $A_1 \cup A_2$ angeben. Die leichten Details zur Zulässigkeit der entsprechenden Wahl von $A_1 \cup A_2$ lassen wir dann in der Regel weg.

4.1.2 Fall 2: $\operatorname{ord} \chi_1 \in \{2, 3, 4\}$

Lemma 4.2. *Sei* $\operatorname{ord} \chi_1 \leq 4$ *und im Falle, dass* χ_1 *reell ist, setzen wir* ρ_1 *als komplex voraus. Ferner seien* f *eine Funktion, die Bedingung 1 und 2 erfüllt und* k *und* ε *positive Konstanten.*

Dann gilt für $q \geq q_0(f,k,\varepsilon)$

$$\begin{aligned}0 \leq (k^2+\frac{1}{2})(F(-\lambda_1)-F(\lambda'-\lambda_1)) - 2kF(0) + \frac{f(0)}{8}(k^2+3k+\frac{3}{2}) + \varepsilon \\ + 2\cdot\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{kF(-\lambda_1+it) - (k^2+\frac{3}{4})F(it)\right\} + \sup_{t\in\mathbb{R}}\Re\left\{\frac{1}{2}F(-\lambda_1+it) - 2kF(it)\right\}. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Beweis. Zum Beweis des Lemmas verändern wir erstmal die Ungleichung (4.4), indem wir dort $\beta^\star$ durch β_1 ersetzen. Dies ist offensichtlich möglich. Die daraus resultierende Ungleichung nennen wir (4.4'). Wir möchten nun analog zum Fall $\operatorname{ord}\chi_1 \geq 5$ die acht verschiedenen „K-Terme“ in (4.4') abschätzen. Dazu halten wir einige generelle Bemerkungen fest.

- Im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ muss beachtet werden, dass aus $L(\rho_1,\chi_1)=0$ folgt, dass $L(\overline{\rho_1},\chi_1)=0$. Dabei gilt $\overline{\rho_1} \in R$ und $\overline{\rho_1} \neq \rho_1, \rho'$, denn nach Voraussetzung ist dann ρ_1 komplex und $\overline{\rho_1} \neq \rho'$ nach Definition. Diese zusätzliche Nullstelle $\overline{\rho_1}$ werden wir im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ manchmal verwenden. Allgemein ist immer $\overline{\rho_1} \in R$ eine Nullstelle von $L(s,\overline{\chi_1})$. Dies werden wir auch im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 3$ verwenden.

- Für sämtliche Nullstellen $\rho \in R$ der Funktionen $L(s,\chi)$ gilt, dass $\Re\{\rho\} \leq \Re\{\rho_1\}$. Wegen der Wahl von β_1 anstelle von $\beta^\star$ haben wir also freie Wahl welche Nullstellen bzw. Terme „$-\Re\{F((s-\rho)\mathscr{L})\}$“ wir bei der Abschätzung der Ausdrücke $K(\beta^\star+it,\chi)$ mit einbeziehen. Mit anderen Worten: Die Menge A_1 in Lemma 3.4 wird immer leer sein.

- Für $\operatorname{ord}\chi_1 \leq 4$ gilt, dass die Ordnung von χ_1^2 und χ_1^3 auch jeweils ≤ 4 ist.

- Wir verwenden die Abkürzung

$$K_0(s,\chi) = \mathscr{L}^{-1}K(s,\chi) - \varepsilon.$$

Zunächst haben wir mit Lemma 3.1 für $\operatorname{ord}\chi_1 \in \{2,3,4\}$

$$K_0(\beta_1,\chi_0) \leq F(-\lambda_1)$$

und

$$K_0(\beta_1 + i(\gamma_1-\gamma'),\chi_0) \leq \Re\{F(-\lambda_1 + i(\mu_1-\mu'))\}.$$

Aus Lemma 3.4 folgt

$$K_0(\beta_1+i\gamma',\chi_1) \leq \begin{cases} -F(\lambda'-\lambda_1) - \Re\{F(i(\mu'-\mu_1))\} \\ \qquad -\Re\{F(i(\mu'+\mu_1))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ -F(\lambda'-\lambda_1) - \Re\{F(i(\mu'-\mu_1))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\}, \end{cases}$$

wobei für $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ wir $A_1 \cup A_2 = \{\rho', \rho_1, \overline{\rho_1}\}$ wählen und im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\}$ wir $A_1 \cup A_2 = \{\rho', \rho_1\}$ wählen.

Weiterhin folgt mit $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1, \overline{\rho_1}\}$ bzw. $\{\rho_1\}$ für den Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ bzw. $\operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\}$

$$K_0(\beta_1+i\gamma_1,\chi_1) \leq \begin{cases} -F(0) - \Re\{F(2i\mu_1)\} + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ -F(0) + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\}. \end{cases}$$

Es ist $\chi_1^2 = \chi_0$ bzw. $\overline{\chi_1}$ für $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ bzw. 3. Verwendet man also Lemma 3.1 für den Fall

$\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ und Lemma 3.4 mit $A_1 \cup A_2 = \{\overline{\rho_1}\}$ bzw. $\emptyset$ für $\operatorname{ord}\chi_1 = 3$ bzw. 4, so folgt

$$K_0(\beta_1 + i(\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^2) \leq \begin{cases} \Re\{F(-\lambda_1 + i(\mu_1 + \mu'))\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ -\Re\{F(i(2\mu_1 + \mu'))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3, \\ \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 4. \end{cases}$$

Mit $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1\}$ folgt weiterhin

$$K_0(\beta_1 + i(2\gamma_1 - \gamma'), \chi_1) \leq -\Re\{F(i(\mu_1 - \mu'))\} + \frac{f(0)}{8} \quad \operatorname{ord}\chi_1 \in \{2,3,4\}.$$

Außerdem folgt mit der Wahl $A_1 \cup A_2 = \emptyset$ in den Fällen $\operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\}$, dass

$$K_0(\beta_1 + 2i\gamma_1, \chi_1^2) \leq \begin{cases} \Re\{F(-\lambda_1 + 2i\mu_1)\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \in \{3,4\} \end{cases}$$

und mit $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1\}$ bzw. $A_1 \cup A_2 = \emptyset$ im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ bzw. $\operatorname{ord}\chi_1 = 4$, dass

$$K_0(\beta_1 + i(2\gamma_1 + \gamma'), \chi_1^3) \leq \begin{cases} -\Re\{F(i(\mu_1 + \mu'))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ \Re\{F(-\lambda_1 + i(2\mu_1 + \mu'))\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3, \\ \frac{f(0)}{8} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 4. \end{cases}$$

Setzen wir die obigen Abschätzungen in (4.4') ein und berücksichtigen wir (3.37) so folgt für $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$

$$\begin{aligned} 0 \leq{} & (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda_1) - F(\lambda' - \lambda_1)) - 2kF(0) + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 2k + 1) + \varepsilon \\ & + 2\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{kF(-\lambda_1 + it) - (k^2 + \frac{3}{4})F(it)\right\} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{\frac{1}{2}F(-\lambda_1 + it) - 2kF(it)\right\}. \end{aligned}$$

Für $\operatorname{ord}\chi_1 = 3$ bekommen wir

$$\begin{aligned} 0 \leq{} & (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda_1) - F(\lambda' - \lambda_1)) - 2kF(0) + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 3k + \frac{5}{4}) + \varepsilon \\ & + \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{kF(-\lambda_1 + it) - (k^2 + \frac{3}{4})F(it)\right\} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{\frac{1}{4}F(-\lambda_1 + it) - kF(it)\right\} \end{aligned}$$

und für $\operatorname{ord}\chi_1 = 4$ schließlich

$$\begin{aligned} 0 \leq{} & (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda_1) - F(\lambda' - \lambda_1)) - 2kF(0) + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 3k + \frac{3}{2}) + \varepsilon \\ & + \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{kF(-\lambda_1 + it) - (k^2 + \frac{3}{4})F(it)\right\}. \end{aligned}$$

Aus diesen drei Ungleichungen folgt nach Berücksichtigung von (3.38) die Aussage des Lemmas.
$\square$

4.1.3 Herleitung von konkreten Abschätzungen

Aus der Ungleichung (4.5) bzw. (4.14) gilt es nun Abschätzungen für Fall 1 bzw. Fall 2 zu folgern.

Bemerkungen zu Fall 1 ($\operatorname{ord}\chi_1 \geq 5$)

Wir besprechen die dazugehörige Vorgehensweise exemplarisch an einem Beispiel. Angenommen, wir sind in Fall 1 und

$$\lambda_1 \in [0.34, 0.36] =: [\lambda_{11}, \lambda_{12}].$$

Nehme nun an, dass $\lambda' \leq 2.06$ (die Konstante 2.06 ist im Nachhinein bestmöglich). Ziel ist es einen Widerspruch herzuleiten, womit wir dann unter den gemachten Voraussetzungen $\lambda' > 2.06$ bewiesen hätten.

Die Tabelle [23, Table 8 (§9)] besagt $\lambda' \geq 1.309$. Die Tabelle [23, Table 10/Lemma 9.4 (§9)] liefert $\lambda_2 \geq 0.903$. Also können wir $\lambda^\star = 0.903 \leq \min\{\lambda', \lambda_2\}$ wählen. Sei S das Supremum auf der rechten Seite von (4.5). Mit Lemma 3.9 bekommen wir die Abschätzung $S \leq C = 0.017\ldots$, wobei wir dafür die folgenden Parameter wählten:

$$\gamma = 1.13 - \frac{\lambda_{12}}{5}, \qquad k = 0.75 + \frac{\lambda_{12}}{7}, \tag{4.15}$$

$$k_1 = k, \qquad k_2 = k^2 + \frac{3}{4}, \qquad k_3 = 0, \tag{4.16}$$

$$s_1 = \lambda^\star, \qquad s_{11} = s_{12} = \lambda^\star, \qquad s_2 = \lambda_1, \qquad s_{21} = \lambda_{11}, \qquad s_{22} = \lambda_{12}, \tag{4.17}$$

$$\Delta_1 = 0, \qquad \Delta_2 = 0.004, \qquad \Delta_t = 0.004, \qquad x_1 = 15. \tag{4.18}$$

Nun ist die rechte Seite von (4.5) ohne das Supremum monoton wachsend in λ_1 und λ', was sofort aus der Definition der Laplace-Transformierten $F(z)$ folgt. Also folgt

$$-\varepsilon \leq (k^2 + \frac{1}{2})(F(-\lambda^\star) - F(2.06 - \lambda^\star)) - 2kF(\lambda_{12} - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 3k + \frac{3}{2}) + C. \tag{4.19}$$

Schließlich berechnen wir die rechte Seite der letzten Ungleichung mit dem Computer und erhalten einen negativen Wert - die Funktion f ist dabei durch das in (4.15) gewählte γ festgelegt. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist dies ein Widerspruch. Also haben wir für $q \geq q_0(f, k, \varepsilon)$ bewiesen, dass aus $\lambda_1 \in [0.34, 0.36]$ die Abschätzung

$$\lambda' > 2.06$$

folgt.

Völlig analog zu diesem Beispiel beweisen wir Werte für die Intervalle

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] = [0.34, 0.36], \quad [0.36, 0.38], \quad \ldots, \quad [0.80, 0.82], \quad [0.82, 0.827].$$

Dazu müssen wir jeweils ein $\lambda^\star$ wählen. Für die Fälle, in denen $\lambda_1 \leq 0.68$ ist, lesen wir ein $\lambda^\star$ aus [23, Table 8, 10 (§9))] ab. Dazu bemerken wir, dass in [23, Table 8 (§9)] in der Zeile mit $\lambda_1 \leq 0.66$ ein Zahlendreher vorliegt. Die Abschätzung $\lambda' \geq 0.783$ müsste dort $\lambda' \geq 0.738$ lauten. Wir benutzen der Einfachheit halber (damit letzteres nicht erst überprüft werden muss) die Abschätzung $\lambda' \geq 0.714$ für $\lambda_1 \leq 0.68$. Ist $\lambda_1 \geq 0.68$, so nehmen wir $\lambda^\star = \lambda_1$. Die rechte Seite von (4.5) ist auch mit dieser Wahl von $\lambda^\star$ monoton wachsend in λ_1 und λ', denn

$$F(-\lambda_1) - F(\lambda' - \lambda_1) = \int_0^{2\gamma} f(x)e^{\lambda_1 x}(1 - e^{-\lambda' x})\, dx.$$

Weiterhin wählen wir in den Fällen mit $\lambda_1 \leq 0.68$ die Parameter (4.15) - (4.18) und für $\lambda_1 \geq 0.68$

wählen wir (4.15) und

$$
\begin{array}{llll}
k_1 = k, & k_2 = 0, & k_3 = k^2 + \dfrac{3}{4}, & \\
s_1 = \lambda_1, & s_{11} = \lambda_{11}, & s_{12} = \lambda_{12}, & \\
\Delta_1 = 0.004, & \Delta_2 = 0, & \Delta_t = 0.004, & x_1 = 15.
\end{array}
$$

Bemerkungen zu Fall 2 (ord $\chi_1 \leq 4$)

Analog zum obigen Beispiel leiten wir aus der Ungleichung (4.14) eine Tabelle her für Fall 2 und die Intervalle

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] = [0.34, 0.38], [0.38, 0.42], \dots, [1.02, 1.06], [1.06, 1.099].$$

Aufgrund der besseren erzielten Werte reicht es hier λ_1 in 0.04-Schritten zu staffeln. Wieder gilt, dass die rechte Seite von (4.14) ohne die beiden Suprema monoton wachsend in λ_1 und λ' ist.

Diesmal müssen wir zwei Suprema abschätzen, S_1 stehe für das erste und S_2 für das zweite Supremum aus (4.14) (die Numerierung laufe dabei immer von links nach rechts). Wir wählen die Parameter

$$\gamma = 1.21 - \frac{5\lambda_{12}}{12} \quad \text{und} \quad k = 0.77 + \frac{\lambda_{12}}{10}.$$

In Lemma 3.9 benutzen wir die folgenden Werte. Dabei hat man für k_i bei den beiden Suprema S_1 und S_2 verschiedene Werte, für s_i und s_{ij} jedoch die gleichen:

$$
\begin{array}{llll}
k_{1,S_1} = 2k, & k_{2,S_1} = 0, & k_{3,S_1} = 2(k^2 + \dfrac{3}{4}), & \\
k_{1,S_2} = \dfrac{1}{2}, & k_{2,S_2} = 0, & k_{3,S_2} = 2k, & \\
s_1 = \lambda_1, & s_{11} = \lambda_{11}, & s_{12} = \lambda_{12}, & \\
\Delta_1 = 0.004, & \Delta_2 = 0, & \Delta_t = 0.004, & x_1 = 15.
\end{array}
$$

Bevor wir die Ergebnisse in zwei Tabellen aufschreiben, möchten wir noch folgende Erklärungen diesbezüglich notieren, welche auch in späteren Tabellen Anwendung finden:

- Die folgenden Tabellen liefern Aussagen der Form $\lambda_1 \leq \lambda_{12} \Rightarrow \lambda' > c_2$. Jedoch haben wir eigentlich nur Aussagen der Form $\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] \Rightarrow \lambda' > c_2$ bewiesen. Da aber die Abschätzungen für kleinere λ_1 besser sind und da weiterhin der Fall $\lambda_1 \leq 0.34$ nach [23, Theorem 1 (S.268)] nicht eintritt, ist alles korrekt.

- Wir haben die Abschätzungen der Suprema $S \leq C$ (Fall 1) bzw. $S_1 \leq C_1$ und $S_2 \leq C_2$ (Fall 2) der jeweiligen Tabelle beigefügt. Man beachte dabei, dass wir in der Tabelle die aufgerundeten Werte der Abschätzungen C bzw. C_1 und C_2 notieren. Die zweite Zeile in Tabelle 2 besagt z.B., dass unter den bekannten Voraussetzungen die Aussage

  $$\lambda_1 \leq 0.38 \Rightarrow \lambda' > 1.96$$

  gilt. Zum Beweis dessen haben wir $\lambda^\star = 0.887$ benutzt. Außerdem haben wir mittels Lemma 3.9 bewiesen, dass

  $$\sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 \in [0.36, 0.38]}} \Re \left\{ kF(-\lambda^\star + it) - (k^2 + \frac{3}{4}) F(\lambda_1 - \lambda^\star + it) \right\} \leq C \leq 0.0134.$$

Tabelle 2. λ'**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda' >$	$\lambda^\star$	$C \leq$
0.36	2.06	0.903	0.0172
0.38	1.96	0.887	0.0134
0.40	1.86	0.871	0.0102
0.42	1.77	0.856	0.0074
0.44	1.69	0.842	0.0049
0.46	1.61	0.829	0.0032
0.48	1.53	0.816	0.0028
0.50	1.47	0.803	0.0025
0.52	1.40	0.791	0.0021
0.54	1.34	0.780	0.0018
0.56	1.28	0.769	0.0015
0.58	1.23	0.759	0.0012
0.60	1.18	0.749	0.0009
0.62	1.13	0.739	0.0008
0.64	1.09	0.730	0.0008
0.66	1.04	0.714	0.0007
0.68	1.00	0.712	0.0007
0.70	0.96		0.0012
0.72	0.93		0.0011
0.74	0.91		0.0010
0.76	0.89		0.0009
0.78	0.86		0.0008
0.80	0.84		0.0007
0.82	0.83		0.0006
0.827	0.827		0.0005

Tabelle 3. λ'**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex, $\operatorname{ord}\chi_1 \in \{2,3,4\}$)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda' >$	$C_1 \leq$	$C_2 \leq$
0.38	2.53	0.0060	0.0027
0.42	2.35	0.0051	0.0024
0.46	2.20	0.0043	0.0020
0.50	2.06	0.0035	0.0017
0.54	1.94	0.0028	0.0015
0.58	1.84	0.0021	0.0012
0.62	1.75	0.0015	0.0010
0.66	1.67	0.0010	0.0008
0.70	1.59	0.0006	0.0006
0.74	1.52	0.0006	0.0004
0.78	1.46	0.0006	0.0003
0.82	1.40	0.0006	0.0002
0.86	1.35	0.0006	0.0002
0.90	1.30	0.0006	0.0002
0.94	1.25	0.0006	0.0002
0.98	1.21	0.0006	0.0002
1.02	1.17	0.0006	0.0002
1.06	1.13	0.0006	0.0002
1.099	1.099	0.0006	0.0002

Tabelle 3 liefert bessere Werte als Tabelle 2. Damit gilt Tabelle 2 für beide Fälle und ersetzt [23, Table 8 (§9)]. Wir werden einen Teil der Werte aus Tabelle 2 später in Tabelle 2' noch ein wenig verbessern. Weiterhin liefert Tabelle 2 eine geringfügige Verbesserung von [23, Theorem 2a]. Konkret wird die dortige Konstante $c = 0.696$ auf $c = 0.702$ verbessert. Dies folgt aus den folgenden beiden Punkten:

- Ist χ_1 oder ρ_1 komplex so liefert Tabelle 2, dass $\lambda' \geq 0.827$. Weiterhin liefert [23, Lemma 9.4], dass[2] $\lambda_2 > 0.702$. Also kann wegen $l(q) \geq 1$ die Funktion

$$\prod_{\chi \pmod q} L(s,\chi)$$

höchstens die beiden einfachen Nullstellen ρ_1 und $\overline{\rho_1}$ in

$$\sigma \geq 1 - \frac{0.702}{\mathscr{L}}, \quad |t| \leq 1 \tag{4.20}$$

[2] Zwar steht in [23, Lemma 9.4] die Aussage $\lambda_2 \geq 0.702$. Es wurde aber $\lambda_2 > 0.702$ bewiesen. In der Regel gilt für jegliche Abschätzungen aus [23], in denen als bewiesene Abschätzung $\lambda \geq c$ präsentiert wird, dass in Wirklichkeit $\lambda > c$ gezeigt wurde. Im Übrigen folgt aus Stetigkeitsgründen sowieso, dass wenn mit der obigen Methode gezeigt wurde, dass $\lambda \geq c$, dann gilt auch $\lambda \geq c + \varepsilon$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

haben.

- Sind χ_1 und ρ_1 beide reell, so liefern [23, Lemma 8.4, Lemma 8.8] die hinreichenden Abschätzungen $\lambda' \geq 1.294$ und $\lambda_2 \geq 0.745$.

4.2 λ_2-Abschätzungen

Wie im letzten Abschnitt so gelte auch in diesem, dass mindestens eines der beiden Elemente χ_1, ρ_1 komplex sei. Wir benutzen in diesem Abschnitt Verbesserungspotential 5 [23, S.334] in Verbindung mit Verbesserungspotential 2 [23, S.332].

4.2.1 Ein Lemma für λ_2- und λ_3-Abschätzungen

Wir beweisen die folgende verfeinerte Version von [23, Lemma 9.2].

Lemma 4.3. *Sei χ_1 oder ρ_1 komplex und f eine Funktion, die Bedingung 1 und 2 erfüllt. Ferner seien $j \in \{2,3\}$ und $\lambda^\star$ eine reelle Zahl mit $0 < \lambda^\star \leq \min\{\lambda', \lambda_2\}$. Wenn ρ' nicht existiert, so setzen wir nur $\lambda^\star \leq \lambda_2$ voraus. Schließlich seien ε und k positive Konstanten. Für $q \geq q_0(\varepsilon, f, k)$ gilt dann*

$$0 \leq (k^2 + \frac{1}{2})\,(F(-\lambda^\star) - F(\lambda_j - \lambda^\star)) - 2kF(\lambda_1 - \lambda^\star) + D + \varepsilon, \tag{4.21}$$

wobei

$$D = \begin{cases} \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}) & \textit{falls } \chi_1^2, \chi_1^3 \neq \chi_0, \chi_j, \overline{\chi_j}, \\ S_1 + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{5}{4}) & \textit{falls } \chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \textit{ und } \operatorname{ord}\chi_1 \geq 6, \\ 2S_1 + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 4k + 1) & \textit{falls } \chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \textit{ und } \operatorname{ord}\chi_1 = 4, \\ S_1 + S_2 + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 4k + \frac{5}{4}) & \textit{falls } \chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \textit{ und } \operatorname{ord}\chi_1 = 5, \\ S_2 + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}) & \textit{falls } \chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \textit{ und } \operatorname{ord}\chi_1 \geq 7, \\ 2S_2 + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}) & \textit{falls } \chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \textit{ und } \operatorname{ord}\chi_1 = 6, \\ 2S_1 + \frac{f(0)}{6}(k^2 + \frac{7}{2}k + 1) & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ 2S_2 + \frac{f(0)}{6}(k^2 + \frac{7}{2}k + \frac{11}{8}) & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3 \end{cases}$$

und

$$S_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{\frac{1}{4}F(-\lambda^\star + it) - kF(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\right\},$$
$$S_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\left\{-\frac{1}{4}F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\right\}.$$

Andere als die in der Gleichung für D genannten acht Fälle gibt es nicht.

Beweis. Für den Beweis numerieren wir die Fälle nacheinander von eins bis acht durch. Fall 3 ist beispielsweise der Fall

$$\chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}\chi_1 = 4.$$

Die Aussage im Lemma ist wohldefiniert, denn die acht Fälle überlappen sich nicht. Dazu erwähnen wir, dass Fall 2 sich nicht mit Fall 5 oder 6 überlappt. Wären wir nämlich gleichzeitig in Fall 2 und 5 oder in Fall 2 und 6 so folgte $\chi_1^3 \in \{\chi_1^2, \overline{\chi_1}^2\}$, also $\chi_1 = \chi_0$ oder $\operatorname{ord} \chi_1 \leq 5$, was beides ausgeschlossen ist. Die „paarweise Disjunktheit" der restlichen Fälle ist noch offensichtlicher.

Weiterhin wurden alle Fälle genannt, denn: Angenommen, wir würden uns in keinem der acht obigen Fälle befinden. Wegen Fall 1, 7 und 8 bedeutet dies, dass $\operatorname{ord} \chi_1 \geq 4$ und $\chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$ oder $\chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$. Da wir uns aber auch nicht in Fall 2-6 befinden folgt $\chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$ und $\operatorname{ord} \chi_1 \in \{4, 5\}$. Wäre $\operatorname{ord} \chi_1 = 4$, dann folgt

$$\overline{\chi_1} = \chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\},$$

was wegen $j \neq 1$ ein Widerspruch zur Definition der χ_j ist. Wäre $\operatorname{ord} \chi_1 = 5$, so folgt

$$\chi_1^2 = \overline{\chi_1}^3 \in \{\overline{\chi_j}, \chi_j\},$$

dann sind wir aber im Fall 4, Widerspruch und fertig mit der Begründung.

Wir brauchen noch eine weitere wichtige Bemerkung. Man betrachte dazu beispielsweise den Fall 2, also sei $\chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$. Dann können wir oBdA annehmen, dass $\chi_1^2 = \chi_j$, da χ_j und $\overline{\chi_j}$, als sie definiert wurden, austauschbar waren. Der Grund für diese „Austauschbarkeit" liegt in den einfachen Fakten

$$\rho \in R \text{ Nullstelle von } L(s, \chi_j) \iff \overline{\rho} \in R \text{ Nullstelle von } L(s, \overline{\chi_j}),$$

$$\Re\{\rho\} = \Re\{\overline{\rho}\}$$

und für $i, j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\chi_j \neq \chi_i, \overline{\chi_i} \iff \overline{\chi_j} \neq \chi_i, \overline{\chi_i}.$$

Die gleiche Überlegung gilt für die Fälle 3, 4, 5 und 6. Also betrachten wir jeweils nur den Fall $\chi_1^2 = \chi_j$ bzw. $\chi_1^3 = \chi_j$ anstelle von $\chi_1^2 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$ bzw. $\chi_1^3 \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$.

Wir betrachten nun die Ungleichung in [23, S.306 2.Zeile], welche nach der Standardmethode aus [23, S.305 letzte Zeile] gefolgert wird. Beachte dabei die Beziehung

$$\Re\{x\}\Re\{y\} = \frac{1}{2}(\Re\{xy\} + \Re\{x\overline{y}\}).$$

Also gilt diese Ungleichung auch, wenn darin β_1 durch eine andere komplexe Zahl $\beta \in \mathbb{C}$ ersetzt wird. Wie in Verbesserungspotential 5 vorgeschlagen wird, ersetzen wir β_1 durch $\beta^\star = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda^\star$, wobei $\lambda^\star$ wie im Lemma definiert sei. Es folgt die Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 \leq &(k^2 + \frac{1}{2})K(\beta^\star, \chi_0) + (k^2 + \frac{1}{2})K(\beta^\star + i\gamma_j, \chi_j) + 2kK(\beta^\star + i\gamma_1, \chi_1) \\ &+ kK(\beta^\star + i(\gamma_1 + \gamma_j), \chi_1\chi_j) + kK(\beta^\star + i(-\gamma_1 + \gamma_j), \overline{\chi_1}\chi_j) \\ &+ \frac{1}{4}K(\beta^\star + i(2\gamma_1 + \gamma_j), \chi_1^2\chi_j) + \frac{1}{4}K(\beta^\star + i(-2\gamma_1 + \gamma_j), \overline{\chi_1}^2\chi_j) \\ &+ \frac{1}{2}K(\beta^\star + 2i\gamma_1, \chi_1^2). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Mit identischem Vorgehen wie beim Beweis von Lemma 4.1 und Lemma 4.2 folgern wir nun aus (4.22) die Ungleichungen des Lemmas für die acht verschiedenen Fälle. Dabei muss bei der Abschätzung eines Terms $K(\beta^\star + it, \chi)$ jeweils kontrolliert werden, ob der Charakter χ gleich χ_0, χ_1 oder $\overline{\chi_1}$ ist. Dann geht man folgendermaßen vor:

- Ist $\chi = \chi_0$, dann benutze Lemma 3.1.

- Ist $\chi = \chi_1$, dann benutze Lemma 3.4. Dort muss die Nullstelle ρ_1 berücksichtigt werden. Ist ρ_1 nicht bereits in der Menge A_1, so füge man sie in die Menge A_2 ein. Beim Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ muss zusätzlich die Nullstelle $\overline{\rho_1} \neq \rho_1$ berücksichtigt werden. Wegen $\beta' \leq \beta^\star$ müssen keine weitere Nullstellen berücksichtigt werden. Insgesamt wird also die Menge A_2 so gewählt, dass
$$A_1 \cup A_2 = \begin{cases} \{\rho_1, \overline{\rho_1}\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ \{\rho_1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ist $\chi = \overline{\chi_1}$, so berücksichtigt man die Nullstelle $\overline{\rho_1}$ (und ggf. auch ρ_1) und geht völlig analog zum Fall $\chi = \chi_1$ vor. Es folgt
$$A_1 \cup A_2 = \begin{cases} \{\overline{\rho_1}, \rho_1\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2, \\ \{\overline{\rho_1}\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sei $\chi \neq \chi_0,\ \chi_1,\ \overline{\chi_1}$. Wieder wird Lemma 3.4 benutzt. Diesmal gilt für alle Nullstellen $\rho \in R$ von $L(s,\chi)$ die Ungleichung $\Re\{\rho\} \leq \Re\{\rho_2\} \leq \beta^\star$. Also ist $A_1 = \emptyset$. Ist zusätzlich $\chi = \chi_j$, so wählen wir $A_2 = \{\rho_j\}$ oder $A_2 = \emptyset$. Für $\chi \neq \chi_j$ wählen wir immer $A_2 = \emptyset$.

- Für die Fälle in denen bekannt ist, dass $\operatorname{ord}\chi_1 \leq 6$, benutzen wir in Lemma 3.4 den Wert $\phi(\chi_1) = \phi(\chi_1^2) = \frac{1}{4}$. Gilt zusätzlich $\chi_j \in \{\chi_1^2, \chi_1^3\}$ so benutzen wir für alle in (4.22) auftauchenden Charaktere $\chi \neq \chi_0$ den Wert $\phi(\chi) = \frac{1}{4}$. In den übrigen Fällen verwenden wir $\phi(\chi) \leq \frac{1}{3}$.

Wir schätzen nun die einzelnen „K-Terme“ ab. Mit der Bezeichnung
$$K_0(s,\chi) = \mathscr{L}^{-1}K(s,\chi) - \varepsilon$$
gilt
$$K_0(\beta^\star, \chi_0) \leq F(-\lambda^\star) \text{ für Fall 1-8,}$$
$$K_0(\beta^\star + i\gamma_j, \chi_j) \leq \begin{cases} -F(\lambda_j - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 2, 5, 7, 8,} \\ -F(\lambda_j - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 3, 4, 6} \end{cases}$$
und
$$K_0(\beta^\star + i\gamma_1, \chi_1) \leq \begin{cases} -F(\lambda_1 - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 2, 5,} \\ -F(\lambda_1 - \lambda^\star) + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 3, 4, 6, 8,} \\ -F(\lambda_1 - \lambda^\star) - \Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + 2i\mu_1)\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 7.} \end{cases}$$

Bei den restlichen Termen aus (4.22) gilt es zu untersuchen, wann der Charakter χ gleich χ_0, χ_1 oder $\overline{\chi_1}$ ist. Unter Berücksichtigung der obigen Zusatzbemerkung, also für $l \in \{2,3\}$ oBdA $\chi_1^l = \chi_j$ im Falle von $\chi_1^l \in \{\chi_j, \overline{\chi_j}\}$, folgt
$$\chi_1^2\chi_j = \begin{cases} \chi_1^2\chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 1,} \\ \chi_1^4 \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 2,} \\ \chi_1^4 = \chi_0 & \text{für Fall 3,} \\ \chi_1^4 = \overline{\chi_1} & \text{für Fall 4,} \\ \chi_1^5 \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 5,} \\ \chi_1^5 = \overline{\chi_1} & \text{für Fall 6,} \\ \chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 7,} \\ \overline{\chi_1}\chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 8,} \end{cases}$$

und

$$\overline{\chi_1}^2\chi_j = \begin{cases} \overline{\chi_1}^2\chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 1,} \\ \chi_0 & \text{für Fall 2,} \\ \chi_0 & \text{für Fall 3,} \\ \chi_0 & \text{für Fall 4,} \\ \chi_1 & \text{für Fall 5,} \\ \chi_1 & \text{für Fall 6,} \\ \chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 7,} \\ \chi_1\chi_j \neq \chi_0, \chi_1, \overline{\chi_1} & \text{für Fall 8.} \end{cases}$$

Also folgt

$$K_0(\beta^\star + i(2\gamma_1+\gamma_j), \chi_1^2\chi_j) \leq \begin{cases} \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 2, 5, 7, 8,} \\ \Re\{F(-\lambda^\star + i(2\mu_1+\mu_j))\} & \text{für Fall 3,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(3\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 4, 6} \end{cases}$$

und

$$K_0(\beta^\star + i(-2\gamma_1+\gamma_j), \overline{\chi_1}^2\chi_j) \leq \begin{cases} \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 7, 8,} \\ \Re\{F(-\lambda^\star + i(-2\mu_1+\mu_j))\} & \text{für Fall 2, 3, 4,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(-3\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 5,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(-3\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 6.} \end{cases}$$

Analog schließt man

$$K_0(\beta^\star + i(\gamma_1+\gamma_j), \chi_1\chi_j) \leq \begin{cases} \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 2, 5, 7, 8,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(2\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 3,} \\ \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 4, 6,} \end{cases}$$

$$K_0(\beta^\star + i(-\gamma_1+\gamma_j), \overline{\chi_1}\chi_j) \leq \begin{cases} \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 5, 7, 8,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(-2\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 2,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + i(-2\mu_1+\mu_j))\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 3, 4,} \\ \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 6} \end{cases}$$

und

$$K_0(\beta^\star + 2i\gamma_1, \chi_1^2) \leq \begin{cases} \frac{f(0)}{6} & \text{für Fall 1, 2, 5,} \\ \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 3, 4, 6,} \\ \Re\{F(-\lambda^\star + 2i\mu_1)\} & \text{für Fall 7,} \\ -\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + 3i\mu_1)\} + \frac{f(0)}{8} & \text{für Fall 8.} \end{cases}$$

Trägt man für einen der acht Fälle die obigen acht Ungleichungen zusammen, passt das ε an und beachtet ggf. noch (3.37), so folgt die entsprechende Ungleichung des Lemmas. Es folgt das Lemma. □

4.2.2 Abschätzungen für die Fälle 1, 2, 3, 4, 6 und 8

Mit Hilfe von Lemma 4.3 beweisen wir zuerst Abschätzungen für λ_2. Setze dazu $j = 2$ und $\lambda^\star = \lambda_2$. Wir nehmen dabei an, dass $\lambda_2 \leq \lambda'$. Wäre $\lambda_2 > \lambda'$, so hätten wir vermöge der λ'-Abschätzungen aus Tabelle 2 und 3 bereits sehr gute Abschätzungen. Man könnte jetzt die acht verschiedenen Ungleichungen aus dem Lemma hernehmen und für jeden Fall eine Tabelle aufstellen, analog zu Tabelle 2 und 3. Das Minimum über die jeweiligen Einträge der acht Tabellen wäre dann unsere allgemein gültige Abschätzung für λ_2. Wir sparen uns jedoch etwas Arbeit, indem wir die Fälle 1, 2, 3, 4, 6 und 8 zusammen behandeln auf Kosten von geringfügig schlechteren Werten. Die Fälle 5 und 7 behandeln wir separat. Wir beginnen mit

Fall 1

Für diesen Fall gilt gemäß Lemma 4.3 die Ungleichung

$$0 \leq (k^2 + \frac{1}{2})\,(F(-\lambda_2) - F(0)) - 2kF(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}) + \varepsilon. \tag{4.23}$$

Die rechte Seite von (4.23) ist monoton wachsend in λ_1. Eine Monotonie in λ_2 lässt sich aber nicht so leicht ablesen. Aus diesem Grund muss das Vorgehen im Vergleich zum Abschnitt mit den λ'-Abschätzungen ein wenig verändert werden (vergleiche [23, S.307 oben]). Sei ein $\delta > 0$ gegeben. Wir nehmen mal an, dass

$$\lambda_1 \leq \lambda_{12}, \quad \lambda_2 \in [\lambda_{2,alt}, \lambda_{2,alt} + \delta], \quad 2k - (k^2 + \frac{1}{2}) \geq 0$$

für gewisse konkrete Werte λ_{12}, $\lambda_{2,alt}$ und k. Die Voraussetzung an das k ist erfüllt, wenn

$$k \in \left[1 - \sqrt{1/2}, 1 + \sqrt{1/2}\right]. \tag{4.24}$$

Es folgt aus (4.23), dass

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \leq & (k^2 + \frac{1}{2})\,(F(-\lambda_2) - F(\lambda_{12} - \lambda_2) - F(0)) \\
& - (2k - (k^2 + \frac{1}{2}))F(\lambda_{12} - \lambda_2) + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}) \\
\leq & (k^2 + \frac{1}{2})\,(F(-\lambda_{2,alt} - \delta) - F(\lambda_{12} - \lambda_{2,alt} - \delta) - F(0)) \\
& - (2k - (k^2 + \frac{1}{2}))F(\lambda_{12} - \lambda_{2,alt}) + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{3}{2}).
\end{aligned}$$

Den Term $F(\lambda_{12} - \lambda_2)$ haben wir dabei abgespalten, da dies für die Rechnungen vorteilhafter ist. Jetzt machen wir weiter wie immer: Bekommen wir für konkrete Werte von γ, k, λ_{12}, $\lambda_{2,alt}$ und δ auf der rechten Seite der letzten Ungleichung etwas Negatives, so ist dies für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ein Widerspruch. Wissen wir zusätzlich, z.B. mittels [23, Table 10 (§9)], dass $\lambda_2 \geq \lambda_{2,alt}$, so haben wir bewiesen, dass

$$\lambda_1 \leq \lambda_{12} \Rightarrow \lambda_2 > \lambda_{2,alt} + \delta.$$

Das gleiche machen wir für alle Intervalle

$$\lambda_2 \in [\lambda_{2,alt} + j\delta, \lambda_{2,alt} + (j+1)\delta] \qquad (j \in \{1, 2, \ldots, [(\lambda_{2,neu} - \lambda_{2,alt})/\delta]\}).$$

Erhalten wir jedes Mal etwas Negatives, so haben wir insgesamt bewiesen, dass

$$\lambda_1 \leq \lambda_{12} \Rightarrow \lambda_2 > \lambda_{2,neu}.$$

Die soeben beschriebene Prozedur führen wir für die Intervalle

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] = [0.34, 0.36], [0.36, 0.38], \ldots, [0.68, 0.70]$$

durch. Wir wählen

$$\gamma = 0.42 + \lambda_{12}, \quad k = 0.59 + \frac{2}{5}\lambda_{12}, \quad \delta = 0.0001. \tag{4.25}$$

Dieses k erfüllt immer (4.24). Die Werte für γ und k wurden mit Blick auf die zu involvierenden Fälle 2, 3, 4, 6 und 8 gewählt. Als $\lambda_{2,alt}$ nehmen wir die Abschätzungen aus [23, Table 10/Lemma 9.4]. Der zweite Eintrag in „Table 10“ besagt beispielsweise, dass für $\lambda_1 \leq 0.36$ gilt, dass $\lambda_2 \geq 0.903$. Also benutzen wir für den Fall $\lambda_1 \in [0.34, 0.36]$ den Wert $\lambda_{2,alt} = 0.903$.

Damit beweist man für Fall 1 die entsprechenden Abschätzungen für λ_2, die in der nachfolgenden Tabelle 4 notiert sind. Diese gelten zuerst nur für den Fall, dass $\lambda_2 \leq \lambda'$, was eine Voraussetzung weiter oben war. Wenn jedoch letzteres nicht der Fall ist, so hat man vermöge Tabelle 2 mindestens genauso gute Abschätzungen. Damit gelten die Werte der Tabelle 4 immer im Fall 1. Bevor wir nun die Tabelle notieren, besprechen wir noch ein paar andere Fälle.

Involvierung der Fälle 2, 3, 4, 6 und 8 in die Tabelle für Fall 1

Für Fall 2 gehen wir völlig analog zu Fall 1 vor und wählen auch die gleichen Werte für γ, k und δ (siehe (4.25)). Diesmal brauchen wir aber zusätzlich eine Abschätzung für das Supremum S_1. Wir setzen dafür voraus, dass $\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}]$. Außerdem nehmen wir mal an, dass [23, Table 10] die Abschätzung $\lambda_2 \geq \lambda_{2,alt}$ liefert und dass wir für Fall 1 die Abschätzung $\lambda_2 \geq \lambda_{2,neu}$ bewiesen haben. Wir möchten nun die gleiche Abschätzung auch für Fall 2 beweisen.

Für die Abschätzung des Supremums S_1 mittels Lemma 3.9 wählen wir die folgenden Parameter (beachte, dass γ und k bereits gewählt wurden):

$$\begin{aligned} &k_{1,S_1} = \frac{1}{4}, && k_{2,S_1} = k, && k_{3,S_1} = 0, && \\ &s_1 = \lambda_2, && s_{11} = \lambda_{2,alt}, && s_{12} = \lambda_{2,neu}, && \\ &s_2 = \lambda_1, && s_{21} = \lambda_{11}, && s_{22} = \lambda_{12}, && \\ &\Delta_1 = 0.015, && \Delta_2 = 0.007, && \Delta_t = 0.015, && x_1 = 7. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Wir erhalten eine Abschätzung $S_1 \leq C_1$ und können damit (hoffentlich bzw. wenn wir alle Werte vorher richtig gewählt haben) im gleichen Stil wie für Fall 1 beweisen, dass im Fall 2 gilt: $\lambda_2 > \lambda_{2,neu}$.

Wir können die Fälle 3, 4, 6 und 8 gleichzeitig mit diesem Fall 2 behandeln. Dafür brauchen wir eine Abschätzung des Supremums S_2. Wir benutzen für γ, k, s_{ij}, Δ_i, Δ_t und x_1 die gleichen Werte wie bei der Abschätzung für S_1 und ersetzen lediglich die Zeile (4.26) durch

$$k_{1,S_2} = 0, \quad k_{2,S_2} = \frac{1}{4}, \quad k_{3,S_2} = 0.$$

Damit erhalten wir eine Abschätzung $S_2 \leq C_2$.

Wenn

$$D(Fall\ 3) := 2C_1 + \frac{f(0)}{8}(k^2 + 4k + 1) \leq C_1 + \frac{f(0)}{6}(k^2 + 4k + \frac{5}{4}) =: D(Fall\ 2),$$

dann folgt aus der Ungleichung, die gemäß Lemma 4.3 für Fall 3 gilt, diejenige Ungleichung, die wir verwendet haben, um λ_2-Abschätzungen für Fall 2 zu beweisen. Alles, was auf Basis dieser letzten Ungleichung bewiesen wurde, gilt dann also auch für Fall 3. Analog muss für die Fälle $j = 4$, 6 und 8 lediglich kontrolliert werden, ob

$$D(Fall\ j) \leq D(Fall\ 2) \tag{4.27}$$

ist. Letzteres wurde gemacht und trifft in der Tat zu (die zu beweisenden λ_2-Abschätzungen wurden extra so gewählt, damit dies alles durchgeht). Insgesamt folgt

Tabelle 4. λ_2**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex, Fall 1, 2, 3, 4, 6, 8)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda_2 > \lambda_{2,neu} =$	$\lambda_{2,alt} =$	$C_1 \leq$	$C_2 \leq$
0.36	1.69	0.903	0.0223	0.0152
0.38	1.69	0.887	0.0263	0.0181
0.40	1.69	0.871	0.0310	0.0214
0.42	1.69	0.856	0.0362	0.0252
0.44	1.67	0.842	0.0408	0.0287
0.46	1.59	0.829	0.0414	0.0297
0.48	1.52	0.816	0.0420	0.0307
0.50	1.45	0.803	0.0420	0.0315
0.52	1.39	0.791	0.0423	0.0324
0.54	1.31	0.780	0.0401	0.0317
0.56	1.23	0.769	0.0373	0.0305
0.58	1.13	0.759	0.0320	0.0274
0.60	1.04	0.749	0.0271	0.0245
0.62	0.96	0.739	0.0226	0.0216
0.64	0.88	0.730	0.0176	0.0182
0.66	0.82	0.721	0.0144	0.0156
0.68	0.76	0.712	0.0139	0.0126

Beachte: Wir werden gleich zeigen, dass der Fall $\lambda_1 \leq 0.44$ nicht auftritt. Die Werte „1.69“ wurden extra so gewählt - das ist kein Druckfehler.

4.2.3 Abschätzungen für die Fälle 5 und 7

Die Fälle 5 und 7 werden völlig analog zu Fall 2 behandelt, wobei lediglich etwas andere Parameter und andere zu beweisende λ_2-Abschätzungen gewählt werden. In Fall 5 wählen wir

$$
\begin{array}{llll}
\gamma = 0.76 + \dfrac{\lambda_{12}}{2}, & k = 0.84, & \delta = 0.0001, & \\
k_{1,S_2} = 0, & k_{2,S_2} = \dfrac{1}{4}, & k_{3,S_2} = 0, & \\
s_1 = \lambda_2, & s_{11} = \lambda_{2,alt}, & s_{12} = \lambda_{2,neu}, & \\
s_2 = \lambda_1, & s_{21} = \lambda_{11}, & s_{22} = \lambda_{12}, & \\
\Delta_1 = 0.010, & \Delta_2 = 0.007, & \Delta_t = 0.010, & x_1 = 7.
\end{array}
$$

In Fall 7 ist χ_1 reell und ρ_1 komplex. Wir gehen genauso vor wie in Fall 2, beginnen wegen [23, Lemma 9.5] unsere Werte bei $\lambda_1 \geq 0.50$, und wählen

$$
\begin{array}{lll}
\gamma = 0.61 + \dfrac{\lambda_{12}}{2}, & k = 0.81, & \delta = 0.0001, \\
k_{1,S_1} = \dfrac{1}{4}, & k_{2,S_1} = k, & k_{3,S_1} = 0, \\
s_1 = \lambda_2, & s_{11} = \lambda_{2,alt}, & s_{12} = \lambda_{2,neu}, \\
s_2 = \lambda_1, & s_{21} = \lambda_{11}, & s_{22} = \lambda_{12}, \\
\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_t = 0.015, & x_1 = 7. &
\end{array}
$$

Man beachte, dass wir im Fall $\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}]$ mit $\lambda_{11} \geq 0.70$ aus [23, Table 10] keine Werte für $\lambda_{2,alt}$ ablesen können. In diesem Fall nehmen wir $\lambda_{2,alt} = \lambda_{11}$, was wegen $\lambda_1 \leq \lambda_2$ erlaubt ist.

Es folgt

Tabelle 5. λ_2**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex, Fall 5)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda_2 > \lambda_{2,neu} =$	$\lambda_{2,alt} =$	$C_2 \leq$
0.36	1.69	0.903	0.0664
0.38	1.69	0.887	0.0702
0.40	1.69	0.871	0.0742
0.42	1.69	0.856	0.0783
0.44	1.67	0.842	0.0799
0.46	1.56	0.829	0.0700
0.48	1.45	0.816	0.0606
0.50	1.36	0.803	0.0535
0.52	1.27	0.791	0.0465
0.54	1.19	0.780	0.0406
0.56	1.11	0.769	0.0348
0.58	1.04	0.759	0.0299
0.60	0.97	0.749	0.0249
0.62	0.91	0.739	0.0208
0.64	0.85	0.730	0.0167
0.66	0.79	0.721	0.0126
0.68	0.74	0.712	0.0092

Tabelle 6. λ_2**-Abschätzungen**
(χ_1 reell und ρ_1 komplex, Fall 7)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda_2 > \lambda_{2,neu} =$	$\lambda_{2,alt} =$	$C_1 \leq$
0.54	1.43	0.780	0.0301
0.58	1.36	0.759	0.0276
0.62	1.28	0.739	0.0242
0.66	1.20	0.721	0.0206
0.70	1.11	0.704	0.0167
0.74	1.02	0.70	0.0128
0.78	0.93	0.74	0.0090
0.82	0.82	0.78	0.0070

Insgesamt erhalten wir die folgenden Abschätzungen für λ_2. Wähle dazu das Minimum der Einträge von Tabelle 4, 5 und 6. Dies ist letztendlich immer der Eintrag aus Tabelle 5. Zum Vergleich schreiben wir die alten Werte aus [23, Table 10] dazu.

Tabelle 7. λ_2**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex, alle Fälle)

	(neue Werte)	(alte Werte)
$\lambda_1 \leq$	$\lambda_2 >$	$\lambda_2 >$
0.36	1.69	0.903
0.38	1.69	0.887
0.40	1.69	0.871
0.42	1.69	0.856
0.44	1.67	0.842
0.46	1.56	0.829
0.48	1.45	0.816
0.50	1.36	0.803
0.52	1.27	0.791
0.54	1.19	0.780
0.56	1.11	0.769
0.58	1.04	0.759
0.60	0.97	0.749
0.62	0.91	0.739
0.64	0.85	0.730
0.66	0.79	0.721
0.68	0.74	0.712
0.70	-	0.704
0.702	-	0.702

Man bemerkt, dass die Güte der Verbesserung abnimmt, je mehr sich λ_1 dem Wert 0.70 nähert. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, dass dann die verwendete Ungleichung (4.21) praktisch in diejenige aus [23, Lemma 9.2] übergeht. Und aus letzterer wurden die alten Werte aus [23, Table 9] gefolgert.

4.3 λ_3-Abschätzungen

4.3.1 Für $\lambda_1 \leq 0.62$ und χ_1 oder ρ_1 komplex

Sei χ_1 oder ρ_1 komplex. Dieser Abschnitt verbessert Teile von [23, Table 9]. Mit Hilfe von Lemma 4.3 und $j = 3$ leiten wir untere Abschätzungen für λ_3 her. Wir behandeln die acht Fälle in diesem Lemma separat und setzen dafür erstmal exemplarisch voraus, dass

$$\lambda_1 \in [0.54, 0.56].$$

Sind wir in Fall 1 dann ist χ_1^2, $\chi_1^3 \neq \chi_0$, χ_3, $\overline{\chi_3}$ und wir wählen für $\lambda^\star$ das Minimum der λ'- und λ_2-Abschätzungen aus Tabelle 2 und 7, also $\lambda^\star = \min\{1.28, 1.11\} = 1.11$. Mittels (4.21) erhält man nun Abschätzungen für λ_3. Dieses Mal brauchen wir nicht mit einem $\delta > 0$ zu arbeiten, da die rechte Seite von (4.21) ohne das D bereits monoton in λ_1 und λ_3 ist. Wir wählen die Parameter γ und k aus (4.25) und erhalten

$$\lambda_3 > 1.160.$$

Für Fall 2 wählen wir die gleichen Parameter. Weiterhin benutzen wir die Abschätzungen von S_1 und S_2, welche für Tabelle 4 berechnet wurden. Diese Abschätzungen wurden dort sogar für einen größeren $\lambda^\star$-Bereich bewiesen, als wir es jetzt nötig haben (jetzt ist $\lambda^\star$ eine feste Konstante c, während bei den genannten Berechnungen $\lambda^\star = \lambda_2$ in einem speziellen Intervall liegen durfte, welches die Konstante c enthält). Wir erhalten

$$\lambda_3 \geq 1.167.$$

Letztere Abschätzung ist auch in den Fällen 3 und 4 gültig gemäß den Argumenten und Rechnungen, die wir im Rahmen von Tabelle 4 durchgeführt haben.

Sind wir in Fall 5 oder 6, dann ist $\chi_1^3 \in \{\chi_3, \overline{\chi_3}\}$ und es folgt $\chi_1^3 \notin \{\chi_2, \overline{\chi_2}\}$. Also sind wir in der Situation von Tabelle 4 oder 6 und erhalten

$$\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \min\{1.36, 1.23\} = 1.23.$$

Offensichtlich gilt diese letzte Abschätzung auch in Fall 7 oder 8 gemäß Tabelle 4 und 6.

Insgesamt haben wir

$$\lambda_3 \geq \min\{1.160, 1.167, 1.23\} = 1.160.$$

Das gleiche führen wir für die restlichen λ_1-Intervalle durch. Für $\lambda_1 \leq 0.52$ nehmen wir dabei an, dass $\lambda_1 \in [0.50, 0.52]$, denn im Fall $\lambda_1 \leq 0.50$ liefert Tabelle 7, dass $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq 1.36 \geq 1.320$.

Tabelle 8. λ_3**-Abschätzungen**
(χ_1 oder ρ_1 komplex)

$\lambda_1 \leq$	(alle Fälle) $\lambda_3 >$	(Fall 1) $\lambda_3 >$	(Fall 2-4) $\lambda_3 >$	(Fall 5-8) $\lambda_3 >$	$\lambda^\star$
0.52	1.320	1.352	1.320	1.39	1.27
0.54	1.243	1.253	1.243	1.31	1.19
0.56	1.160	1.160	1.167	1.23	1.11
0.58	1.079	1.079	1.103	1.13	1.04
0.60	1.001	1.001	1.038	1.04	0.97
0.62	0.933	0.933	0.979	0.96	0.91

4.3.2 Für $\lambda_1 \geq 0.62$ oder χ_1 und ρ_1 beide reell

In [23, Lemma 10.3] wird die Abschätzung $\lambda_3 \geq \frac{6}{7} - \varepsilon$ für $q \geq q_0(\varepsilon)$ bewiesen. Durch analoges Vorgehen beweisen wir

Lemma 4.4. *Es gibt eine Konstante q_0, so dass für $q \geq q_0$ in den Fällen χ_1 komplex bzw. χ_1 und ρ_1 beide reell die folgenden zwei Tabellen gelten.*

Tabelle 9. λ_3**-Abschätzungen**
(χ_1 komplex)

$\lambda_1 \in$	Zusatzbedingung	$\lambda_3 >$
$[0.62, 0.64]$	-	0.902
$[0.64, 0.66]$	-	0.898
$[0.66, 0.68]$	-	0.893
$[0.68, 0.70]$	-	0.888
$[0.68, 0.70]$	$\lambda_2 \leq 0.745$	1.054
$[0.70, 0.71]$	-	0.886
$[0.70, 0.71]$	$\lambda_2 \leq 0.745$	1.048
$[0.71, 0.72]$	-	0.883
$[0.71, 0.72]$	$\lambda_2 \leq 0.75$	1.036
$[0.72, 0.74]$	-	0.878
$[0.72, 0.74]$	$\lambda_2 \leq 0.76$	1.012
$[0.74, 0.78]$	-	0.868
$[0.74, 0.78]$	$\lambda_2 \leq 0.78$	0.996

Tabelle 10. λ_3**-Abschätzungen**
(χ_1 und ρ_1 reell)

$\lambda_1 \in$	$\lambda_3 >$
$[0.44, 0.60]$	1.176
$[0.60, 0.70]$	1.055
$[0.70, 0.80]$	0.952

Die vierte Zeile in Tabelle 9 besagt

$$\lambda_1 \in [0.68, 0.70] \Rightarrow \lambda_3 > 0.888,$$

während die fünfte Zeile besagt, dass

$$\lambda_1 \in [0.68, 0.70] \text{ und } \lambda_2 \leq 0.745 \Rightarrow \lambda_3 > 1.054.$$

Analog für den Rest. Den Fall χ_1 reell und ρ_1 komplex haben wir nicht behandelt, wenngleich dies entlang der nachfolgenden Ausführungen möglich gewesen wäre.

Beweis. Der Beweis des Lemmas läuft im Wesentlichen genauso ab wie der Beweis der allgemeinen Abschätzung $\lambda_3 \geq \frac{6}{7} - \varepsilon$. Wir setzen

$$\Sigma_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq 3} \Big(K(\beta_1 + i\gamma_j + i\gamma_k, \chi_j \chi_k) + K(\beta_1 + i\gamma_j - i\gamma_k, \chi_j \overline{\chi_k}) \Big)$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma_3 = K(\beta_1 + i\gamma_1 + i\gamma_2 + i\gamma_3, \chi_1\chi_2\chi_3) + K(\beta_1 + i\gamma_1 + i\gamma_2 - i\gamma_3, \chi_1\chi_2\overline{\chi_3}) \\ + K(\beta_1 + i\gamma_1 - i\gamma_2 + i\gamma_3, \chi_1\overline{\chi_2}\chi_3) + K(\beta_1 + i\gamma_1 - i\gamma_2 - i\gamma_3, \chi_1\overline{\chi_2\chi_3}).\end{aligned}$$

Beweis für χ_1 komplex:

Fall 1: Es sei keiner der Charaktere in Σ_3 gleich χ_0. Dies gilt genau dann wenn

$$\chi_3, \overline{\chi_3} \neq \chi_1\chi_2, \chi_1\overline{\chi_2}.$$

Mit den beiden Lemmata 3.1 und 3.4 folgen die Ungleichungen [23, (10.4)], [23, (10.5)] und aus [23, (10.2)] dann [23, (10.6)]. Wir notieren letztere Ungleichung hier:

$$0 \leq F(-\lambda_1) - F(\lambda_3 - \lambda_1) - F(\lambda_2 - \lambda_1) - F(0) + \frac{7}{6} f(0) + \varepsilon. \tag{4.28}$$

Fall 2: Angenommen, wir sind nicht in Fall 1. Wir möchten beweisen, dass (4.28) auch dann gilt, vorausgesetzt $\lambda_1 \in [0.44, 0.85]$. Also müssen wir untersuchen, wie sich die Ungleichung verändert, wenn einer (oder mehrere) der Charaktere in Σ_3 doch gleich χ_0 ist.

Der Fall $\chi_3 \in \{\chi_1\chi_2, \chi_1\overline{\chi_2}\}$ folgt nach Umbenennung aus dem Fall $\overline{\chi_3} \in \{\chi_1\chi_2, \chi_1\overline{\chi_2}\}$ - vergleiche dafür die Bemerkung im Beweis von Lemma 4.3. Der Fall $\overline{\chi_3} = \chi_1\overline{\chi_2}$ folgt wiederum nach Umbenennung aus dem Fall $\overline{\chi_3} = \chi_1\chi_2$, womit wir nur noch diesen letzten Fall betrachten müssen. Sei also $\chi_1\chi_2\chi_3 = \chi_0$. Wir unterscheiden die drei Fälle (χ_2 und χ_3 komplex), (χ_2 komplex und χ_3 reell), (χ_2 reell und χ_3 komplex). Da χ_1 komplex ist, tritt der Fall, dass χ_2 und χ_3 beide reell sind, nicht auf, da sonst $\chi_0(n) = \chi_1\chi_2\chi_3(n)$ komplexe Werte annehmen würde.

Fall 2.1: Seien χ_2 und χ_3 komplex. Es ist

$$\chi_1\chi_2\overline{\chi_3} = \chi_1\chi_2\chi_3\overline{\chi_3}^2 = \overline{\chi_3}^2.$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{\chi_3}^2 \neq \chi_0$. Analog sind $\chi_1\overline{\chi_2}\chi_3 = \overline{\chi_2}^2$ und $\chi_1\overline{\chi_2\chi_3} = \chi_1^2$ ungleich χ_0. Also muss man nur den Term $K(\beta_1 + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \chi_1\chi_2\chi_3)$ mit Lemma 3.1 behandeln anstelle von Lemma 3.4. Dann bekommt man anstatt von [23, (10.5)] die Ungleichung

$$\Sigma_3 \leq \mathscr{L}\Re\{F(-\lambda_1 + i\mu)\} + \frac{3}{2} f(0)\phi\mathscr{L} + \varepsilon\mathscr{L},$$

wobei $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$.

Wegen $\chi_2\chi_3 = \overline{\chi_1}$ können wir beim Term $K(\beta_1 + i(\gamma_2 + \gamma_3), \chi_2\chi_3)$ in Σ_2 die Nullstelle $\overline{\rho_1}$ verwenden. Anstelle von [23, (10.4)] haben wir dann

$$\Sigma_2 \leq -\mathscr{L}\Re\{F(i\mu)\} + \frac{6}{2} f(0)\phi\mathscr{L} + \varepsilon\mathscr{L}.$$

Insgesamt erhalten wir für diesen Fall aus [23, (10.2)] wieder (4.28), aber mit dem zusätzlichen Term

$$+\Re\left\{\frac{1}{4}F(-\lambda_1 + i\mu) - \frac{1}{2}F(i\mu)\right\} - \frac{1}{24}f(0)$$

auf der rechten Seite. Damit gilt (4.28), vorausgesetzt wir haben

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\{F(-\lambda_1+it)-2F(it)\} \le \frac{1}{6}f(0). \tag{4.29}$$

Fall 2.2 und 2.3: Sei χ_j reell ($j \in \{2,3\}$) und der entsprechend andere Charakter komplex. Dann erhalten wir mit $\widetilde{\mu_j} = \mu - 2\mu_j$

$$\Sigma_3 \le \mathscr{L}\Big(\Re\{F(-\lambda_1+i\mu)\} + \Re\{F(-\lambda_1+i\widetilde{\mu_j})\}\Big) + \frac{2}{2}f(0)\phi\mathscr{L} + \varepsilon\mathscr{L}.$$

Wenn $j=3$ so gilt $\chi_2\overline{\chi_3} = \chi_2\chi_3 = \overline{\chi_1}$, also

$$\Sigma_2 \le -\mathscr{L}\Big(\Re\{F(i\mu)\} + \Re\{F(i\widetilde{\mu_j})\}\Big) + \frac{6}{2}f(0)\phi\mathscr{L} + \varepsilon\mathscr{L}. \tag{4.30}$$

Für $j=2$ haben wir $\chi_2\overline{\chi_3} = \overline{\chi_2\chi_3} = \chi_1$, also folgt mit (3.37) wieder (4.30). Für die Fälle 2.2 und 2.3 bekommen wir damit wieder die Ungleichung (4.28), diesmal aber mit dem zusätzlichen Term

$$+\Re\left\{\frac{1}{4}F(-\lambda_1+i\mu) - \frac{1}{2}F(i\mu)\right\} + \Re\left\{\frac{1}{4}F(-\lambda_1+i\widetilde{\mu_j}) - \frac{1}{2}F(i\widetilde{\mu_j})\right\} - \frac{2}{24}f(0)$$

auf der rechten Seite. Es reicht also wieder die Bestätigung von (4.29), damit (4.28) in diesen beiden Fällen gilt.

Also beweisen wir (4.29) und zwar für die Funktion $f(t)$ mit $\gamma = 1.25$. Wir benutzen Lemma 3.9 mit den Parametern

$$\begin{array}{llll}
k_1 = 1, & k_2 = 0, & k_3 = 2, & \\
s_1 = \lambda_1, & s_{11} = 0.44, & s_{12} = 0.85, & \\
\Delta_1 = 0.03, & \Delta_2 = 0, & \Delta_t = 0.03, & x_1 = 6
\end{array}$$

und bekommen

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\{F(-\lambda_1+it)-2F(it)\} < 0.18 < 0.54\ldots = \frac{f(0)}{6}.$$

Wir folgern aus (4.28) die in Tabelle 9 behaupteten Werte. Für f wurde bereits die Funktion mit $\gamma = 1.25$ gewählt. Die rechte Seite von (4.28) ist monoton wachsend in λ_2 und λ_3. Eine Monotonie in λ_1 ist jedoch nicht so leicht festzustellen. Wir benutzen, dass

$$F(-\lambda_1) - F(\lambda_3 - \lambda_1)$$

monoton wachsend in λ_1 ist. Wenn also $\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}]$, $\lambda_2 \le \lambda_{22}$ und $\lambda_3 \le \lambda_{32}$, so folgt

$$-\varepsilon \le F(-\lambda_{12}) - F(\lambda_{32} - \lambda_{12}) - F(\lambda_{22} - \lambda_{11}) - F(0) + \frac{7}{6}f(0).$$

Ist $\lambda_1 \in [0.62, 0.64]$, so berechnen wir die rechte Seite der letzten Ungleichung für die Paare

$$(\lambda_{11}, \lambda_{12}) = (0.62 + j\delta, 0.62 + (j+1)\delta),$$

wobei $\delta = 0.0001$ und $j = 0, \ldots, [(0.64 - 0.62)/\delta]$. Dabei nehmen wir $\lambda_{22} = \lambda_{32} = 0.902$. Man beachte, dass wenn $\lambda_2 > 0.902$ wäre wir wegen $\lambda_3 \ge \lambda_2$ sofort fertig wären. Eine Rechnung zeigt nun, dass für jegliche genannten j wir etwas Negatives bekommen, womit die Aussage des Lemmas für $\lambda_1 \in [0.62, 0.64]$ bewiesen wäre. Analog und mit gleichem γ, δ beweisen wir alle Werte im Fall χ_1 komplex. Die Zusatzbedingung $\lambda_2 \le c$ baut man dabei auf die offensichtliche

Weise $\lambda_{22} = c$ ein.

Beweis für χ_1 und ρ_1 beide reell:
Ausgangspunkt ist wieder die Ungleichung [23, (10.2)], wobei wir diesmal β_1 durch β_2 ersetzen. Ziel ist es durch das übliche Vorgehen eine Ungleichung vom Typ (4.28) zu folgern. Dazu müssen alle Terme $K(\beta_2 + it, \chi)$ in Σ_2 und Σ_3 mit $\chi \in \{\chi_0, \chi_1\}$ gesondert behandelt werden.

Zuerst bemerkt man, dass alle Charaktere, die in Σ_3 auftauchen, ungleich χ_1 sind. Auch sieht man schnell, dass alle Charaktere in Σ_2 ungleich χ_0 und alle in Σ_2 außer $\chi_2\chi_3$ und $\chi_2\overline{\chi_3}$ ungleich χ_1 sind.

Wir können außerdem annehmen, dass $\lambda_2 \leq 1.294$. Dann gilt nach [23, Lemma 8.4], dass $\lambda' \geq \lambda_2$. Damit kann man bei der Behandlung eines Terms $K(\beta_2 + it, \chi_1)$ mittels Lemma 3.4 jeweils $A_1 \cup A_2 = \{\rho_1\}$ setzen (da ρ_1 reell fällt $\overline{\rho_1}$ weg). Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

Fall 1: Seien alle Charaktere in Σ_3 ungleich χ_0.

Dann sind aber auch $\chi_2\chi_3$ und $\chi_2\overline{\chi_3}$ ungleich χ_1. Also sind in Σ_2 und Σ_3 alle Charaktere $\neq \chi_0, \chi_1$. Mit $\phi(\chi_1) = \frac{1}{4}$ und $\phi(\chi) \leq \frac{1}{3}$ sonst folgt

$$0 \leq F(-\lambda_2) - F(\lambda_3 - \lambda_2) - F(0) - F(\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{9}{8} f(0) + \varepsilon. \tag{4.31}$$

Fall 2: Nehme an, dass mindestens ein Charakter in Σ_3 gleich χ_0 ist. Nach Umbenennung können wir $\chi_1\chi_2\chi_3 = \chi_0$ annehmen. Es folgt

$$\chi_1\overline{\chi_2\chi_3} = \chi_0, \quad \chi_2\chi_3 = \chi_1, \quad \chi_1\chi_3 = \overline{\chi_2}, \quad \chi_1\overline{\chi_3} = \chi_2.$$

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

Fall 2.1: Seien χ_2 und χ_3 beide komplex. Dann ist $\chi_1\overline{\chi_2}\chi_3 = \overline{\chi_2}^2 \neq \chi_0$ und analog $\chi_1\chi_2\overline{\chi_3} \neq \chi_0$. Außerdem ist $\chi_2\overline{\chi_3} \neq \chi_1$, da sonst aus $\chi_1\chi_2\chi_3 = \chi_0$ ein Widerspruch zu χ_3 komplex folgen würde. Weiter benutzt man die Nullstelle ρ_2 bzw. $\overline{\rho_2}$ von $L(s, \chi_2)$ bzw. $L(s, \overline{\chi_2})$. Zusammen mit den allgemeinen Bemerkungen für Fall 2, sowie der Voraussetzung $\mu_1 = 0$, erhalten wir dann (4.31) mit dem folgenden zusätzlichen Term auf der rechten Seite:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \Re\Big\{F(-\lambda_2 + it) - F(\lambda_1 - \lambda_2 + it) - 2F(it)\Big\} - (\frac{9}{8} - \frac{49}{48}) f(0) \tag{4.32}$$

Fall 2.2: Seien χ_2 und χ_3 beide reell. Dann sind alle vier Charaktere in Σ_3 gleich χ_0 und $\chi_2\overline{\chi_3} = \chi_1$. Diesmal verwenden wir für die beiden Charaktere $\chi_1\chi_3,\ \chi_1\overline{\chi_3}$, die gleich χ_2 sind, die Nullstelle ρ_2. Außerdem ist $\phi(\chi) = \frac{1}{4}$ für alle Charaktere $\chi \neq \chi_0$, die in [23, (10.2)] auftauchen. Man bekommt (4.31) mit dem folgenden zusätzlichen Term auf der rechten Seite:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Re\Big\{F(-\lambda_2 + it) - F(\lambda_1 - \lambda_2 + it) - F(it)\Big\} - (\frac{9}{8} - \frac{6}{8}) f(0). \tag{4.33}$$

Nun folgt mit (3.38) und der Bedingung 2, die die Funktion f erfüllt, dass (4.32) und (4.33) jeweils kleiner oder gleich

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Re\Big\{F(-\lambda_2 + it) - F(\lambda_1 - \lambda_2 + it) - F(it)\Big\} - \frac{5}{48} f(0) \tag{4.34}$$

sind. Wenn wir also zeigen, dass der Term aus (4.34) für $\lambda_1 \in [0.44, 0.80]$ und $\lambda_2 \in [0.44, 1.176]$ kleiner oder gleich 0 ist, dann gilt die Ungleichung (4.31) auch für Fall 2. Mit $\gamma = 1.04$ und den

Werten

$$\begin{array}{llll}
k_1 = 1, & k_2 = 1, & k_3 = 1, & \\
s_1 = \lambda_2, & s_{11} = 0.44, & s_{12} = 1.176, & \\
s_2 = \lambda_1, & s_{21} = 0.44, & s_{22} = 0.80, & \\
\Delta_1 = 0.03, & \Delta_2 = 0.03, & \Delta_t = 0.03, & x_1 = 6
\end{array}$$

folgt

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Re\Big\{F(-\lambda_2 + it) - F(\lambda_1 - \lambda_2 + it) - F(it)\Big\} < 0.10 < 0.13\ldots = \frac{5}{48}f(0).$$

Damit gilt (4.31) immer im Fall χ_1 und ρ_1 beide reell (für $\gamma = 1.04$ wohlgemerkt). Den Rest beweisen wir jetzt völlig analog wie im Fall χ_1 komplex. Zuerst erhalten wir aus (4.31)

$$-\varepsilon \leq F(-\lambda_{22}) - F(\lambda_{32} - \lambda_{22}) - F(0) - F(\lambda_{12} - \lambda_{21}) + \frac{9}{8}f(0).$$

Diesmal müssen wir λ_2 anstelle von λ_1 staffeln. Für den ersten Eintrag in Tabelle 10 nimmt man die Werte $\lambda_{11} = 0.44$, $\lambda_{12} = 0.60$, $\lambda_{32} = 1.176$ und

$$[\lambda_{21}, \lambda_{22}] = \big[0.44 + j\delta, 0.44 + (j+1)\delta\big] \qquad (j \in \{0, 1, \ldots, [\frac{\lambda_{32} - \lambda_{11}}{\delta}]\}, \quad \delta = 0.0001).$$

Für alle j erhält man dann etwas Negatives auf der rechten Seite der letzten Ungleichung, damit einen Widerspruch, und damit die Behauptung $\lambda_3 > \lambda_{32} = 1.176$. Analog für die restlichen Einträge aus Tabelle 10. □

4.4 λ_1-Abschätzungen, Beweis von Theorem 2.3

Generalvoraussetzung dieses Abschnitts ist wieder, dass χ_1 oder ρ_1 komplex ist. Unter dieser Voraussetzung beweist Heath-Brown [23, Lemma 9.5] für hinreichend großes q

$$\lambda_1 \geq \begin{cases} 0.364 & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \geq 6, \\ 0.397 & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 5, \\ 0.348 & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 4, \\ 0.389 & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3, \\ 0.518 & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2. \end{cases}$$

Wir verbessern diese Werte, indem wir einerseits die neuen λ'- und λ_2-Abschätzungen benutzen und andererseits Verbesserungspotential 2 für die Fälle $\operatorname{ord}\chi_1 \leq 5$.

Beginne mit der Ungleichung [23, (9.16)]

$$\begin{aligned} 0 \leq & 14379K(\beta, \chi_0) + 24480K(\beta + i\gamma_1, \chi_1) + 14900K(\beta + 2i\gamma_1, \chi_1^2) \\ & + 6000K(\beta + 3i\gamma_1, \chi_1^3) + 1250K(\beta + 4i\gamma_1, \chi_1^4). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Wir wählen $\beta = \beta^\star = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda^\star$ mit einem $\lambda^\star \leq \min\{\lambda_2, \lambda'\}$ und benutzen die übliche Vorgehensweise mit den beiden Lemmata 3.1 und 3.4. Im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ muss man dabei die beiden Nullstellen ρ_1 und $\overline{\rho_1}$ berücksichtigen, ansonsten nur die Nullstelle ρ_1. Es folgt

$$0 \leq 14379F(-\lambda^\star) - 24480F(\lambda_1 - \lambda^\star) + D + \varepsilon, \tag{4.36}$$

wobei

$$D = \begin{cases} \frac{46630}{6} f(0) & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \geq 6, \\ \frac{46630}{8} f(0) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{ -1250F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\big\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 5, \\ \frac{45380}{8} f(0) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{1250F(-\lambda^\star + it) - 6000F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\big\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 4, \\ \frac{40630}{8} f(0) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{6000F(-\lambda^\star + it) - 16150F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\big\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3, \\ \frac{30480}{8} f(0) + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{14900F(-\lambda^\star + it) - 30480F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\big\} & \\ \quad + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \Re\big\{1250F(-\lambda^\star + it) - 6000F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\big\} & \text{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2. \end{cases}$$

Die verschiedenen Suprema werden wie immer mit Lemma 3.9 abgeschätzt. Wähle dazu $k_3 = 0$ und k_1, k_2 passend zum jeweiligen Supremum, sowie

$$\begin{array}{llll} s_1 = \lambda^\star = s_{11} = s_{12}, & s_2 = \lambda_1, & s_{21} = \lambda_{1,alt}, & s_{22} = \lambda_{1,Ann}, \\ \Delta_1 = 0, & \Delta_2 = 0.005, & \Delta_t = 0.005, & x_1 = 12. \end{array}$$

Dabei ist $\lambda_{1,alt}$ die jeweils alte λ_1-Abschätzung aus [23, Lemma 9.5]. Der Wert $\lambda_{1,Ann}$ ist irgendein konkreter Wert, der am Ende leicht oberhalb der bewiesenen λ_1-Abschätzung liegen wird.

Wir nehmen nun an, dass $\lambda_1 \leq \lambda_{1,Ann}$ und wählen ein dazugehöriges $\lambda^\star$, das wir aus den Abschätzungen für λ' und λ_2 in den Tabellen 2 und 7 ablesen. Für den Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$ benutzen wir dabei die besseren Abschätzungen aus den Tabellen 3 und 6. Wegen der Monotonie von (4.36) (ohne die Suprema) in λ_1 erhalten wir dann Abschätzungen $\lambda_1 > \lambda_{1,neu}$ auf die übliche Art und Weise. Außerdem müssen wir noch den Parameter γ festlegen, den wir für den jeweiligen Fall benutzen möchten. In der folgenden Tabelle fassen wir für jeden der fünf Fälle alle relevanten Daten zusammen. Das wären einerseits γ, $\lambda^\star$, $\lambda_{1,alt}$, $\lambda_{1,Ann}$ und die Abschätzung C des Supremums (bzw. der beiden Suprema zusammen im Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 2$) und andererseits der bewiesene Wert $\lambda_{1,neu}$, der nach Annahme $\leq \lambda_{1,Ann}$ sein muss.

Tabelle 11. λ_1-Abschätzungen
(χ_1 oder ρ_1 komplex)

$\operatorname{ord}\chi_1$	$\lambda_1 > \lambda_{1,neu} =$	$\lambda_{1,alt}$	$\lambda_{1,Ann}$	$\lambda^\star$	γ	C $\leq$
≥ 6	0.440	0.364	0.44	1.67	1.00	-
$= 5$	0.493	0.397	0.50	1.36	0.90	120
$= 4$	0.478	0.348	0.48	1.45	0.82	235
$= 3$	0.498	0.389	0.50	1.36	0.82	290
$= 2$	0.628	0.518	0.66	1.20	0.70	58

Die bewiesenen Werte halten wir im folgenden Lemma fest, welches nun [23, Lemma 9.5] ersetzt.

Lemma 4.5. *Sei* χ_1 *oder* ρ_1 *komplex. Dann gibt es eine Konstante* q_0*, so dass für* $q \geq q_0$ *gilt*

$$\lambda_1 > \begin{cases} 0.440 & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 \geq 6, \\ 0.493 & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 5, \\ 0.478 & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 4, \\ 0.498 & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 3, \\ 0.628 & \textit{falls } \operatorname{ord}\chi_1 = 2. \end{cases}$$

Bemerkung. Liu und Wang (1998, [31, S.345-346]) benutzen die Ungleichung

$$0 \leq (1 + \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)^2$$

anstelle von derjenigen Ungleichung, aus der man (4.35) schließt, nämlich

$$0 \leq (3 + 10\cos\theta)^2(9 + 10\cos\theta)^2. \tag{4.37}$$

Damit beweisen sie für den Fall $\operatorname{ord}\chi_1 = 4$ den Wert 0.3711 anstelle von 0.348 (Heath-Brown) bzw. 0.478 (Lemma 4.5).

Bemerkung. Da $\zeta(s)$ keine Nullstellen auf der Geraden $\Re\{s\} = 1$ besitzt, gibt es ein q_0, so dass für $q \geq q_0$ die Funktion $\zeta(s)$ auch nullstellenfrei in

$$\sigma \geq 1 - 0.440/\mathscr{L}, \quad |t| \leq 1$$

ist. Diese Nullstellenfreiheit überträgt sich dann auf $L(s, \chi_0)$. Lemma 4.5 liefert also Theorem 2.3 im Fall χ_1 oder ρ_1 komplex. Für den Fall χ_1 und ρ_1 beide reell folgt das Theorem aus [23, Lemma 8.4] und [23, Lemma 8.8]. Damit ist Theorem 2.3 bewiesen.

4.5 Noch einmal λ'-Abschätzungen

Mit Hilfe der Werte in Tabelle 7 kann man in den Berechnungen in §4.1.3 ein besseres (größeres) $\lambda^\star$ wählen. Wir benutzen diese neuen $\lambda^\star$, welche aus Tabelle 2 und Tabelle 7 resultieren, und erhalten bei sonst identischem Vorgehen und gleichen Parametern die folgende Verbesserung von Tabelle 2 und [23, Table 8 (§9)]. Außerdem benutzen wir auch, dass $\lambda_1 \geq 0.44$ gemäß Lemma 4.5.

Tabelle 2'. Verbesserte λ'-Abschätzungen.

(χ_1 oder ρ_1 komplex)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda' >$	$\lambda^\star$	$C \leq$
0.46	1.85	1.56	0.0797
0.48	1.76	1.45	0.0598
0.50	1.67	1.36	0.0455
0.52	1.59	1.27	0.0332
0.54	1.51	1.19	0.0235
0.56	1.44	1.11	0.0150
0.58	1.36	1.04	0.0084
0.60	1.29	0.97	0.0026
0.62	1.22	0.91	0.0016
0.64	1.15	0.85	0.0010
0.66	1.08	0.79	0.0008
0.68	1.02	0.74	0.0007
0.70	0.96		-
0.72	0.93		-
0.74	0.91		-
0.76	0.89		-
0.78	0.86		-
0.80	0.84		-
0.82	0.83		-
0.827	0.827		-

Kapitel 5

Nullstellendichte

5.1 Abschätzungen von $N(\lambda)$ für große λ

5.1.1 Neue Koeffizienten ψ_d

Wie in §3.2.2 angesprochen benötigen wir für die Abschätzung von $N(\lambda)$ Koeffizienten ψ_d ($d \in \mathbb{N}$), welche die Bedingungen

$$\psi_d = \mu(d) \qquad (1 \leq d \leq U) \tag{5.1}$$

$$\psi_d = 0 \qquad (d \geq V) \tag{5.2}$$

$$\psi_d \ll 1 \qquad (d \in \mathbb{N}) \tag{5.3}$$

erfüllen und für die

$$\sum_{U<n\leq X} \Big(\sum_{d|n} \psi_d\Big)^2 n^{-1} \tag{5.4}$$

möglichst klein ausfällt. Wir betrachten in diesem Abschnitt die Parameter U, V und X (setze $q^u = U$, $q^v = V$, $q^x = X$) mit $1 < U < V < X$ als fest. Die Wahl von Heath-Brown, nämlich $\psi_d = \psi_d^{U,V}$ (siehe (3.34)), ist bereits recht optimal gemäß [2], aber lässt sich trotzdem noch etwas verbessern, da die Summation in (5.4) nicht erst ab $n > V$ beginnt, sondern bereits ab $n > U$. Diese kleine Verbesserung ist der Gegenstand dieses Abschnitts. Wir benutzen den Ansatz

$$\psi_d = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \psi_d^{R_{i1},R_{i2}} \qquad (d \in \mathbb{N}) \tag{5.5}$$

mit $M \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1$ und $R_{ij} \in \mathbb{R}$, $U \leq R_{i1} < R_{i2} \leq V$ ($1 \leq i \leq M$, $j \in \{1,2\}$). Dabei gilt

$$\psi_d^{R_{i1},R_{i2}} = \frac{\Lambda_{R_{i2}}(d) - \Lambda_{R_{i1}}(d)}{\log \frac{R_{i2}}{R_{i1}}} = \begin{cases} \mu(d) & \text{falls } 1 \leq d \leq R_{i1}, \\ \mu(d)\frac{\log(R_{i2}/d)}{\log(R_{i2}/R_{i1})} & \text{falls } R_{i1} \leq d \leq R_{i2}, \\ 0 & \text{falls } R_{i2} \leq d, \end{cases} \tag{5.6}$$

wobei wir für $R \geq 1$ und $d \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_R(d) = \mu(d) \cdot \max\{0, \log \frac{R}{d}\}$$

setzen. Die Wahl (5.5) erfüllt offensichtlich die drei Bedingungen (5.1), (5.2) und (5.3). Jetzt geht es darum zu entscheiden, wie R_{ij}, α_i und M gewählt werden soll.

Setze

$$u_i = u + i \cdot \frac{v-u}{M}, \qquad U_i = q^{u_i} \qquad (i = 0, \ldots, M) \tag{5.7}$$

und

$$R_{11} = U_0, \quad R_{i2} = R_{(i+1)1} = U_i \quad (i = 1, \ldots, M-1), \quad R_{M2} = U_M. \tag{5.8}$$

Also ist $U_0 = U$ und $U_M = V$. Diese Wahl der R_{ij} ist natürlich recht speziell. Jedoch erleichtert sie die nachfolgenden Berechnungen signifikant und ist außerdem ziemlich optimal für unsere Situation. Es gilt nun die optimalen Werte für M und α_i $(1 \le i \le M)$ herzuleiten. Dazu betrachten wir die folgende Summe für $N \ge 1$

$$S = \sum_{n \le N} \Big(\sum_{d|n} \psi_d \Big)^2.$$

Es gilt

$$\Big(\sum_{d|n} \psi_d \Big)^2 = \sum_{i \le M} \alpha_i^2 \Big(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i} \Big)^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le M} \alpha_i \alpha_j (\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i})(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{j-1},U_j}). \tag{5.9}$$

Also haben wir

$$S = \underbrace{\sum_{i \le M} \alpha_i^2 \sum_{n \le N} \left(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i} \right)^2}_{=:S_0} + 2 \sum_{1 \le i < j \le M} \alpha_i \alpha_j \underbrace{\left(\sum_{n \le N} (\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i})(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{j-1},U_j}) \right)}_{=:S_{ij}}.$$

Für $1 \le i < j \le M$ gilt

$$\begin{aligned} S_{ij} = 1 + \left(\log \frac{U_i}{U_{i-1}} \right)^{-1} \left(\log \frac{U_j}{U_{j-1}} \right)^{-1} \sum_{1 < n \le N} \Big(&\sum_{d|n} \Lambda_{U_i}(d) \sum_{d|n} \Lambda_{U_j}(d) \\ + \sum_{d|n} \Lambda_{U_{i-1}}(d) \sum_{d|n} \Lambda_{U_{j-1}}(d) - \sum_{d|n} \Lambda_{U_i}(d) \sum_{d|n} \Lambda_{U_{j-1}}(d) &- \sum_{d|n} \Lambda_{U_{i-1}}(d) \sum_{d|n} \Lambda_{U_j}(d) \Big). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Zur weiteren Berechnung verwenden wir das folgende Resultat von Graham [16, S.84]. Für $1 \le R_1 \le R_2 \le N$ gilt

$$\sum_{n \le N} \Big(\sum_{d|n} \Lambda_{R_1}(d) \Big) \Big(\sum_{d|n} \Lambda_{R_2}(d) \Big) = N \log R_1 + O(N). \tag{5.11}$$

Dieses Resultat kann verglichen werden mit der Behandlung analoger Summen für allgemeinere Koeffizienten $\Lambda_R(d)$ durch Goldston und Yildirim [13, Theorem 1.1, Theorem 8.1].

Als Korollar folgt für $1 \le R_1 \le R_2$ [16, S.84]

$$\sum_{n \le N} \left(\sum_{d|n} \psi_d^{R_1,R_2} \right)^2 = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \le N \le R_1, \\ \frac{N \log(N/R_1)}{\log^2(R_2/R_1)} + O(\frac{N}{\log^2(R_2/R_1)}) & \text{falls } R_1 < N < R_2, \\ \frac{N}{\log(R_2/R_1)} + O(\frac{N}{\log^2(R_2/R_1)}) & \text{falls } R_2 \le N. \end{cases} \tag{5.12}$$

Wegen $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ für $n > 1$ gilt für alle $R \geq 1$, $N \geq 1$ und $1 < n \leq N$, dass

$$\sum_{d|n} \Lambda_R(d) = \sum_{d|n} \Lambda_{\min\{R,N\}}(d).$$

Also dürfen wir in (5.10) die Λ_{U_i} durch $\Lambda_{\min\{U_i,N\}}$ ersetzen und (5.11) anwenden. Die jeweiligen Hauptterme heben sich glücklicherweise gegenseitig auf und es folgt für hinreichend großes q

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq N \leq U, \\ O(\mathscr{L}^{-2}N) & \text{falls } U \leq N, \end{cases} \tag{5.13}$$

also

$$S = S_0 + O(\mathscr{L}^{-2}N) \qquad (U \leq N), \tag{5.14}$$

wobei die impliziten Konstanten von M und $(\alpha_i)_i$ abhängen. Gemäß (5.12) dominiert dabei S_0 den Restterm $O(\mathscr{L}^{-2}N)$. Also genügt es letztendlich die folgende Summe S' zu minimieren, welche wir mit partieller Summation und (5.12) behandeln.

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \sum_{U < n \leq X} \left(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i} \right)^2 n^{-1} \\ &= (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \left(\int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{s - u_{i-1}}{(u_i - u_{i-1})^2} \, ds + \int_{u_i}^{x} \frac{1}{u_i - u_{i-1}} \, ds \right) \\ &= (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x - u_i}{u_i - u_{i-1}} \right) \\ &= (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \left(\frac{1}{2} + M \frac{x - u_0}{u_M - u_0} - i \right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Für festes M und mit der Nebenbedingung $\sum_i \alpha_i = 1$ wird dies minimiert durch

$$\alpha_i = \left(\sum_{j \leq M} \frac{C(M) - i}{C(M) - j} \right)^{-1}, \tag{5.16}$$

wobei

$$C(M) = \frac{1}{2} + M \frac{x - u_0}{u_M - u_0}.$$

Mit dieser Wahl der α_i muss S' bezüglich M minimiert werden. Nun ist es so, dass man später auch bezüglich des Parameters v optimieren kann. Berücksichtigt man dies, so wird ersichtlich, dass man letztendlich für ein festes $M = M_0$ im Wesentlichen über eine Menge von Parametern optimiert, welche die Parametermenge eines $M < M_0$ enthält. Insofern sollte man ein möglichst großes M wählen. Computerberechnungen zeigen, dass der Gewinn für wachsendes M sehr schnell fällt. Wir werden später $M = 10$ wählen.

5.1.2 Ein Lemma zur Nullstellendichte für große λ und Beweis von Theorem 2.4

Wir benutzen die in §3.2.2 eingeführten Bezeichnungen. Heath-Brown beweist für $0 < \lambda \leq \frac{1}{3}\log\log\mathscr{L}$, $\varepsilon > 0$ und $q \geq q_0(\varepsilon)$, dass [23, (11.5)]

$$N(\lambda) \leq (1+\varepsilon)\frac{67}{6\lambda}(e^{\frac{73\lambda}{30}} - e^{\frac{16\lambda}{15}}). \tag{5.17}$$

Im Grunde genommen zeigt er noch mehr, nämlich für $\lambda_0 = \frac{1}{3}\log\log\mathscr{L}$, $\varepsilon > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\phi = \max_{\chi \pmod q}\phi(\chi)$ und $q \geq q_0(\varepsilon, c_1, c_2)$, dass [23, Lemma 11.1]

$$\sum_{1\leq k\leq N(\lambda_0)} \frac{\lambda^{(k)}}{e^{(4\phi+6c_1+2c_2)\lambda^{(k)}} - e^{(2\phi+4c_1)\lambda^{(k)}}} \leq \frac{2\phi+2c_1+c_2}{4c_1c_2} + \varepsilon. \tag{5.18}$$

Die Ungleichung (5.17) folgt aus (5.18) mit $\phi \leq \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{1}{10}$, und $c_2 = \frac{1}{4}$. Dafür muss man beachten, dass $\lambda/(e^{A\lambda} - e^{B\lambda})$ monoton fallend ist[1] für $A > B > 0$.

Wir benutzen nun Verbesserungspotential 7 [23, S.336-337], sowie die optimierten Koeffizienten ψ_d aus dem letzten Abschnitt und erhalten die folgende leichte Verbesserung von [23, Lemma 11.1].

Lemma 5.1. *Seien ε, c_1, $c_2 > 0$, $\lambda_0 = \frac{1}{3}\log\log\mathscr{L}$, $M \in \mathbb{N}$ und $\alpha_i \geq 0$ ($i \in \{1,\ldots,M\}$) mit $\sum_{i\leq M}\alpha_i = 1$. Wir setzen*

$$x = \frac{2}{3} + 3c_1 + c_2$$

und

$$u_i = \frac{1}{3} + 2c_1 + \frac{i\cdot c_2}{M} \quad (i \in \{0,\ldots,M\}).$$

Sei ferner $w_0 : [u_0, x] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die mit Ausnahme von endlich vielen Punkten in $[u_0, x]$ stetig differenzierbar ist. Außerdem gelte

$$1 \ll w_0(t) \ll 1 \quad \text{und} \quad w_0'(t) \ll 1$$

mit gewissen absoluten impliziten Konstanten. Dann gibt es ein q_0, abhängig von allen gewählten Parametern, so dass für $q \geq q_0$

$$\sum_{1\leq k\leq N(\lambda_0)} \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2\lambda^{(k)}t}\,dt\right)^{-1}$$
$$\leq \frac{M^2+\varepsilon}{c_1c_2^2}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i^2\int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2}\min\{t-u_{i-1}, u_i-u_{i-1}\}\,dt. \tag{5.19}$$

Speziell erhält man für $w_0(t) \equiv 1$, $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $M = 10$ und die α_i aus (5.16), dass für alle $q \geq q_0$ und $\lambda \leq \lambda_0$

$$N(\lambda) \leq \frac{10.98}{\lambda}(e^{\frac{73\lambda}{30}} - e^{\frac{16\lambda}{15}}). \tag{5.20}$$

Setzt man $w_0(t) \equiv 1$ und $M = 1$ so bekommt man [23, Lemma 11.1] zurück. Zur optimalen Wahl der Funktion w_0 gibt es einige Bemerkungen in §7.4.

Die Abschätzung (5.20) verbessert die Konstante $c = \frac{67}{6} = 11.166\ldots$ aus [23, Theorem 5, S.268] auf $c = 10.98$. Man könnte die Konstante c weiterhin verbessern, wenn man - beispielsweise - $\lambda \notin [0.8, 2]$ voraussetzt. Wählt man dann $w_0(t) = e^{\lambda\theta t}$ sowie passende Parameter θ, c_1 und

[1] Das zeigt man wohl am schnellsten mittels $(e^{Ax} - e^{Bx})/x = \int_B^A e^{tx}\,dt$.

c_2 (jeweils andere für $\lambda \le 0.8$ und $\lambda \ge 2$), dann erhält man eine Konstante $c \le 10.3$ (außerdem müsste man noch ein paar zusätzliche Bemerkungen anfügen, da ursprünglich das q_0 auch vom w_0 abhängt, welches in diesem Fall mit λ variiert).

Der Beweis des Lemmas läuft praktisch identisch zum Beweis von (5.18) ab. Einziger Unterschied ist, dass an einer Stelle der frei wählbare Parameter $w_0(t)$ eingefügt wird und andere Koeffizienten ψ_d benutzt werden. Die Argumente sind dann entsprechend anzupassen. Im Folgenden sei dazu immer $q \ge q_0$ für eine hinreichend große Konstante q_0. Setze $w = c_1 - \varepsilon$, $W = q^w$, $U_i = q^{u_i}$ $(i = 0, \ldots, M)$ und $X = q^x$. Wir wählen die Koeffizienten ψ_d wie sie durch (5.5), (5.6), (5.7) und (5.8) definiert wurden und die Koeffizienten θ_d aus (3.33). Ausgangspunkt ist Lemma 3.7, wobei das u dort unserem u_0 hier entspricht und das v dem u_M. Wir wählen

$$w_\chi = \left(w^{-1} \int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2\lambda(\chi)t} \, dt \right)^{-1} \tag{5.21}$$

und setzen $\Re\{\rho(\chi)\} = 1 - \lambda(\chi)\mathscr{L}^{-1}$. Außerdem setzen wir $w_0(t)$ stetig fort auf eine Funktion in $[0, \infty)$ durch $w_0(t) = w_0(u_0)$ für $t \le u_0$ und $w_0(t) = w_0(x)$ für $t \ge x$. Lemma 5.1 folgt dann aus dem Beweis der folgenden drei Ungleichungen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n\chi} \overline{a_{n\chi'}} \ll w_\chi^{\frac{1}{2}} w_{\chi'}^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}^{-1} \qquad (\chi \ne \chi'), \tag{5.22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n\chi}|^2 \le 1 + \varepsilon, \tag{5.23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \le \frac{M^2 + \varepsilon}{(u_M - u_0)^2} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\} \, dt. \tag{5.24}$$

Heath-Brown erwähnt die Richtigkeit der ersten beiden Ungleichungen sowie der dritten Ungleichung für $M = 1$ in [23, S.335], gibt jedoch keine Beweise an. Die Ungleichungen folgen letztendlich auf völlig analoge Weise wie im Fall $w_0(t) \equiv 1$ und $\psi_d = \psi_d^{U,V}$, der in [23, §11] behandelt wird. Die Ungleichungen (5.23) und (5.24) folgen dabei „straight-forward“ (wenngleich ein wenig mühselig) durch partielle Summation und (5.22) wird mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen.

Beweis von (5.22)

Um einen rigorosen Beweis durchzuführen, gehen wir zurück zu [23, §2]. Dort benutzt Heath-Brown Abschätzungen der Charaktersummen von Burgess, um eine obere Abschätzung für

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

zu beweisen. Wir brauchen hier eine analoge Abschätzung von

$$\sum_{1 \le n \le T} \chi(n) n^{-s}$$

für beliebiges $T \ge 1$.

Lemma 5.2 (vergleiche Lemma 2.5 aus [23])**.** *Sei $\chi \ne \chi_0$ ein Charakter* $\pmod q$*. Ferner sei*

$T \geq 1$ oder $T = \infty$ und $k \geq 3$. Außerdem sei $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\Re\{s\} = 1 - \frac{1}{k}$. Dann gilt

$$\sum_{1 \leq n \leq T} \frac{\chi(n)}{n^s} \ll_\varepsilon (1 + |t|) q^{(1+k^{-1})/(3k)+\varepsilon}.$$

Beweis. Sofort aus dem Beweis von [23, Lemma 2.5]. □

Wir führen nun den Beweis der Ungleichung (5.22). Dieser läuft analog zum Fall $w_0(t) \equiv 1$, welcher in [23, S.319, vierte Zeile von unten] „geführt“ wird. Geführt in Anführungsstrichen, da für den Beweis gesagt wird, dass dieser analog zur Behandlung der Gleichung (11.8) in [23] geschieht, was auch absolut zutreffend ist. Seien also $\chi \neq \chi'$ zwei Charaktere aus der betrachteten Menge mit zugehöriger Nullstelle ρ bzw. ρ'. Also sind

$$\rho, \rho' \in \{s \in \mathbb{C} \mid \sigma \geq 1 - \mathscr{L}\lambda_0,\ |t| \leq 1\}.$$

Betrachte die folgende offensichtlich konvergente Summe:

$$\begin{aligned} S =& w_\chi^{-\frac{1}{2}} w_{\chi'}^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n\chi} \overline{a_{n\chi'}} \\ =& \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{d|n} \theta_d)^2 \chi\overline{\chi'}(n) n^{1-\rho-\overline{\rho'}} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U_0}) w_0(\mathscr{L}^{-1} \log n)^2. \end{aligned}$$

Wir benutzen (3.23) und vertauschen Summe und Integral, was mit dem Satz der majorisierten Konvergenz erlaubt ist. Als Majorante kann wegen θ_d, $\chi(n)$, $w_0(t) \ll 1$ und $\sum_{d|n} 1 \ll n^\varepsilon$ die Funktion $C \cdot X \cdot |\Gamma(s)|$ genommen werden für ein $C > 0$. Es folgt

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(s) \left(X^s - \left(\frac{U_0}{\mathscr{L}^2} \right)^s \right) G(s + \rho + \overline{\rho'} - 1)\, ds, \tag{5.25}$$

wobei $G(s)$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sum_{d|n} \theta_d)^2 \chi\overline{\chi'}(n) w_0(\mathscr{L}^{-1} \log n)^2}{n^s} \\ &= \sum_{d_1 \leq W, d_2 \leq W} \theta_{d_1} \theta_{d_2} \sum_{\substack{n=1 \\ d_1|n, d_2|n}}^{\infty} \frac{w_0(\mathscr{L}^{-1} \log n)^2 \chi\overline{\chi'}(n)}{n^s} \\ &= \sum_{d_1 \leq W, d_2 \leq W} \frac{\theta_{d_1} \theta_{d_2} \chi\overline{\chi'}([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]^s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_0(\mathscr{L}^{-1} \log(j\ [d_1, d_2]))^2 \chi\overline{\chi'}(j)}{j^s}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Die Umordnung der Summe ist wegen absoluter Konvergenz für jedes einzelne s erlaubt. Außerdem wurde $\theta_d = 0$ für $d > W$ und die Äquivalenz

$$d_1|n \text{ und } d_2|n \Longleftrightarrow [d_1, d_2]|n$$

benutzt. Da $w_0(t)$ für $t \geq x$ konstant und $\sum_{n=1}^{\infty} \chi\overline{\chi'}(n) n^{-s}$ holomorph in $\Re\{s\} > 0$ ist folgt, dass auch $G(s)$ in $\Re\{s\} > 0$ holomorph ist.

Sei $k \geq 3$ fest gewählt. Wir verschieben die Integrationslinie in (5.25) auf

$$\Re\{s\} = 2 - \frac{1}{k} - \Re\{\rho\} - \Re\{\overline{\rho'}\}.$$

Die horizontalen Integrale verschwinden, da $\Gamma(s)$ für großen Imaginärteil gleichmäßig exponentiell gegen 0 geht, während $L(s,\chi)$ nur polynomiell gegen ∞ geht [3, Lemma 2.6.2]. Da

$$X^s - \left(U_0/\mathscr{L}^2\right)^s$$

die Nullstelle $s = 0$ hat und $\Gamma(s)$ bei $s = 0$ einen einfachen Pol, ist der Integrand im betrachteten Bereich holomorph und wir bekommen mit dem Cauchyschen Integralsatz, dass (5.25) gilt mit der Integrationslinie $(2 - \frac{1}{k} - \Re\{\rho\} - \Re\{\overline{\rho'}\})$ anstelle von (1). Da weiterhin $\Gamma(\sigma + it) \ll e^{-|t|}$ und

$$X^s - (\frac{U_0}{\mathscr{L}^2})^s \ll U_0^{-\frac{1}{k}+\varepsilon}$$

folgt

$$S \ll_\varepsilon U_0^{-\frac{1}{k}+\varepsilon} \sup_{\Re\{s\}=1-1/k} |G(s)|. \tag{5.27}$$

Die innere Summe in (5.26) schätzen wir mit partieller Summation ab zu

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_0(\mathscr{L}^{-1}\log(j\;[d_1,d_2]))^2 \chi\overline{\chi'}(j)}{j^s} \ll& L(s,\chi\overline{\chi'}) + \int_1^X \mathscr{L}^{-1} y^{-1} \Big| \sum_{1\leq j\leq y} \chi\overline{\chi'}(j) j^{-s} \Big| \, dy \\ \ll& \sup_{y\geq 1} \Big| \sum_{1\leq j\leq y} \chi\overline{\chi'}(j) j^{-s} \Big|.\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.2 und $\varepsilon = \frac{1}{k^2}$ folgt für $\Re\{s\} = 1 - 1/k$

$$\begin{aligned}G(s) \ll& (1+|t|) q^{\frac{1}{3k}+\frac{2}{k^2}} \sum_{d_1\leq W, d_2\leq W} [d_1,d_2]^{-1+\frac{1}{k}} \\ \ll& (1+|t|) q^{\frac{1}{3k}+\frac{2}{k^2}} W^{\frac{2}{k}} \sum_{n\leq W^2} d(n)^2 n^{-1},\end{aligned}$$

wobei wir die Bezeichnung $d(n) = \sum_{d|n} 1$ verwenden. Benutzt man jetzt [36, S.62]

$$\sum_{n\leq x} d(n)^2 \ll x \log^3 x$$

dann folgt mit partieller Summation

$$\sum_{n\leq W^2} d(n)^2 n^{-1} \ll q^{\frac{1}{k^2}}.$$

Aus (5.27) folgt also

$$S \ll (q^{2w+\frac{1}{3}-u_0})^{\frac{1}{k}} q^{\frac{3}{k^2}}$$

und da $u_0 > 2w + \frac{1}{3}$ erhalten wir für hinreichend großes k, dass

$$S \ll \mathscr{L}^{-1},$$

was zu zeigen war.

Beweis von (5.23)

Wir beweisen für $q \geq q_0(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}\theta_d\Big)^2\chi_0(n)n^{1-2\Re\{\rho(\chi)\}}(e^{-n/X}-e^{-n\mathscr{L}^2/U_0})w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n)^2$$
$$\leq \frac{1+\varepsilon}{w}\int_{u_0}^{x}w_0(s)^2e^{2\lambda(\chi)s}\,ds. \quad (5.28)$$

Wenn man das $\chi_0(n)$ in der Summe weglassen würde, dann könnte man entlang den nachfolgenden Zeilen auch eine Gleichheit bis auf einen vernachlässigbaren Restterm beweisen.

Wir teilen die Summe auf der linken Seite von (5.28) in die Teilsummen S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 auf, entsprechend den Intervallen

$$n\in[1,W],\quad (W,U_0\mathscr{L}^{-3}],\quad (U_0\mathscr{L}^{-3},U_0],\quad (U_0,X],\quad (X,X\mathscr{L}],\quad (X\mathscr{L},\infty).$$

Wir erinnern daran, dass

$$\Re\{\rho(\chi)\}\geq 1-(3\mathscr{L})^{-1}\log\log\mathscr{L}.$$

Also gilt für $y>0$ und $n\leq q^y$

$$n^{2-2\Re\{\rho(\chi)\}}<\log^y\mathscr{L}.$$

Ferner werden wir $1 \ll w_0(t) \ll 1$ und $w_0'(t)\ll 1$ verwenden sowie vermöge $\theta_d=\psi_d^{1,W}$ die Abschätzung (5.12).

Es ist $\sum_{d|n}\theta_d\ll n^{\varepsilon}$. Zusammen mit

$$e^x=1+x+O(x^2)\qquad (|x|\leq 1)$$

und $u_0>2w$ folgt

$$S_1\ll W^{1+3\varepsilon}\frac{W\mathscr{L}^2}{U_0}\ll\mathscr{L}^{-1}$$

für hinreichend kleines $\varepsilon>0$. Für $n\in(W,U_0\mathscr{L}^{-3}]$ gilt

$$e^{-n/X}-e^{-n\mathscr{L}^2/U_0}\ll\mathscr{L}^{-1}.$$

Also folgt mit partieller Summation

$$S_2\ll\mathscr{L}^{-1}\log^{u_0}\mathscr{L}\sum_{W<n\leq U_0}\Big(\sum_{d|n}\theta_d\Big)^2n^{-1}\ll\mathscr{L}^{-1}\log^{u_0}\mathscr{L}.$$

Weiterhin gilt

$$S_3\ll\log^{u_0}\mathscr{L}\sum_{U_0\mathscr{L}^{-3}<n\leq U_0}\Big(\sum_{d|n}\theta_d\Big)^2n^{-1}\ll\mathscr{L}^{-1}\log^{u_0+1}\mathscr{L}$$

und

$$S_5\ll\log^{x}\mathscr{L}\sum_{X<n\leq X\mathscr{L}}\Big(\sum_{d|n}\theta_d\Big)^2n^{-1}\ll\mathscr{L}^{-1}\log^{x+1}\mathscr{L}.$$

Für S_6 benutzen wir

$$n^{1-2\Re\{\rho(\chi)\}}\sum_{d|n}\theta_d\ll n^{-1+\varepsilon}$$

und erhalten für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$S_6 \ll (X\mathscr{L})^{-1+\varepsilon} \sum_{n > X\mathscr{L}} e^{-n/X} \ll \mathscr{L}^{-1}.$$

Damit verbleibt die Behandlung der Teilsumme S_4, welche auch den Hauptbeitrag liefert. Wir können durch partielle Summation alle differenzierbaren Terme aus der Summe rausnehmen und den Rest mit (5.12) behandeln. Setze $\lambda = \lambda(\chi)$:

$$\begin{aligned}
S_4 \leq & \sum_{U_0 < n \leq X} (\sum_{d|n} \theta_d)^2 w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n)^2 n^{-1+2\lambda\mathscr{L}^{-1}} \\
=& O\left(\mathscr{L}^{-1}\log^x \mathscr{L}\right) - \frac{1}{w\mathscr{L}} \int_{U_0}^{X} (t - U_0)\Big(w_0(\mathscr{L}^{-1}\log t)^2(-1 + 2\lambda\mathscr{L}^{-1})t^{-2+2\lambda\mathscr{L}^{-1}} \\
&\qquad + 2w_0(\mathscr{L}^{-1}\log t)w_0'(\mathscr{L}^{-1}\log t)\mathscr{L}^{-1}t^{-1}t^{-1+2\lambda\mathscr{L}^{-1}}\Big)\, dt \\
\leq & O(\mathscr{L}^{-1}\log^{x+1}\mathscr{L}) + \frac{1 + O(\mathscr{L}^{-1}\log\log\mathscr{L})}{w\mathscr{L}} \int_{U_0}^{X} w_0(\mathscr{L}^{-1}\log t)^2 t^{-1+2\lambda\mathscr{L}^{-1}}\, dt.
\end{aligned}$$

Nach Substitution $s = \mathscr{L}^{-1}\log t$ folgt für $q \geq q_0(\varepsilon)$

$$S_4 \leq \frac{1+\varepsilon}{w} \int_{u_0}^{x} w_0(s)^2 e^{2\lambda s}\, ds$$

und wir sind fertig.

Beweis von (5.24)

Wir beweisen für $q \geq q_0(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} \psi_d\Big)^2 n^{-1}(e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U_0}) w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n)^{-2}$$
$$\leq \frac{M^2+\varepsilon}{(u_M - u_0)^2} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\}\, dt. \quad (5.29)$$

Für $n \leq U_0$ gilt

$$(\sum_{d|n} \psi_d)^2 = (\sum_{d|n} \mu(d))^2 = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Also liefern die Terme für $n \leq U_0$ einen Beitrag von $O(\mathscr{L}^2 U_0^{-1})$ zur Summe auf der linken Seite von (5.29). Weiterhin können wir aufgrund von (5.9) und (5.13) in der Summe das $(\sum_{d|n}\psi_d)^2$ durch

$$\sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \left(\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i}\right)^2$$

ersetzen auf Kosten eines Restterms $O(\mathscr{L}^{-1})$. Es genügt also die Summe

$$S = \sum_{i \leq M} \alpha_i^2 \sum_{n > U_0} (\sum_{d|n} \psi_d^{U_{i-1},U_i})^2 n^{-1}(e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U_0}) w_0(\mathscr{L}^{-1}\log n)^{-2}$$

nach oben abzuschätzen. Wir teilen diese auf in die Untersummen S_1, S_2, S_3 entsprechend den Intervallen

$$n \in (U_0, X], \quad (X, X\mathscr{L}], \quad (X\mathscr{L}, \infty).$$

Analog zur Vorgehensweise im letzten Unterabschnitt bekommen wir mit partieller Summation und (5.12)

$$S_2 \ll \mathscr{L}^{-1} \log \mathscr{L},$$

sowie durch grobe Abschätzung

$$S_3 \ll \mathscr{L}^{-1}.$$

Schließlich benutzt man, dass

$$e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U_0} \leq 1$$

und folgert analog zur Herleitung von (5.15)

$$S_1 \leq (1+\varepsilon) \sum_{i \leq M} \frac{\alpha_i^2}{(u_i - u_{i-1})^2} \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\}\, dt$$

und damit wegen der Definition der u_i, siehe (5.7), die Behauptung.

5.2 Abschätzungen von $N(\lambda)$ für kleine λ

Heath-Brown beweist in [23, §12] Abschätzungen für $N(\lambda)$, die für kleine λ (ungefähr $\lambda \leq 1.30$) besser sind als das, was [23, §11] bzw. §5.1 liefert. In Verbesserungspotential 9 [23, S.336-337] wird gezeigt, dass im Argument von [23, §12] noch mehr Potential steckt. Wir führen die dort gemachten Bemerkungen etwas weiter und verwenden zusätzlich zwei kleine Variationen im Beweis von [23, Lemma 12.1]. Dadurch erhalten wir das folgende auf unsere späteren Bedürfnisse zugeschnittene Lemma. Für $B_1 = D_1 = 0$, $\lambda_{12} = \infty$, $\lambda^\star = \lambda_1$ und $C = 0$ bekommt man [23, Lemma 12.1] zurück.

Lemma 5.3 (vergleiche S.336 in [23])**.** *Seien B_1, D_1 nicht-negative ganze Zahlen, b, d, λ und $\lambda^\star$ positive Zahlen, $C \geq 0$, $\lambda_{12} \in (0, \infty]$ und f eine Funktion, die Bedingung 1 und 2 erfüllt. Setze*

$$m(\chi_1) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \lambda_{12} \geq b, \\ 1 & \textit{falls } \lambda_{12} \leq b \textit{ und } \chi_1 \textit{ reell}, \\ 2 & \textit{falls } \lambda_{12} \leq b \textit{ und } \chi_1 \textit{ komplex}, \end{cases} \tag{5.30}$$

$$E(\chi_1) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } \chi_1 \textit{ reell und } \rho_1 \textit{ komplex}, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}
a_0 =& - D_1 F(\lambda - \lambda^\star) + (D_1 - B_1) F(d - \lambda^\star) \\
&\qquad + (B_1 - m(\chi_1)) F(b - \lambda^\star) + m(\chi_1) F(\lambda_{12} - \lambda^\star) - E(\chi_1) \cdot C, \\
a_1 =& F(-\lambda^\star) \frac{f(0)}{6} - \left(F(\lambda - \lambda^\star) - \frac{f(0)}{6} \right)^2, \\
a_2 =& F(-\lambda^\star) \left(F(-\lambda^\star) - \frac{f(0)}{6} + 2C \right) - 2a_0 \left(F(\lambda - \lambda^\star) - \frac{f(0)}{6} \right), \\
a_3 =& - a_0^2 - 2C \cdot F(-\lambda^\star).
\end{aligned}$$

Angenommen, die gewählten Parameter erfüllen die Voraussetzungen

$$\lambda^\star \le b \le d \le \lambda \le 2, \quad F(\lambda - \lambda^\star) > \frac{f(0)}{6} + E(\chi_1) \cdot C, \quad a_1 < 0. \tag{5.31}$$

Gilt zusätzlich

$$\lambda^\star \le \min\{\lambda', \lambda_2\}, \quad \lambda_1 \le \lambda_{12}, \quad C \ge \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\}\} \tag{5.32}$$

und

$$B_1 \le N(b), \quad D_1 \le N(d),$$

dann folgt für $q \ge q_0$

$$N(\lambda) \le \max \left\{ 0, \left\lceil \frac{a_2 + \sqrt{|a_2^2 - 4a_1 a_3|}}{-2a_1} \right\rceil \right\}. \tag{5.33}$$

Beweis. Der Beweis folgt im Wesentlichen demjenigen von [23, Lemma 12.1]. Sei

$$N = \widetilde{N}(\lambda) = \#\{\chi \mid \chi \ (\mathrm{mod}\ q), \quad L(s,\chi) \text{ hat eine Nullstelle in } \sigma \ge 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda, \quad |t| \le l(q)\}.$$

Das $l(q) \in [1, \mathscr{L}]$ ist dabei in Lemma 3.3 definiert worden. Seien nun die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt und $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(N)}$ die verschiedenen in der Definition von N auftauchenden Charaktere. Wir benutzen $\widetilde{N}(\lambda)$ anstelle von $N(\lambda)$, um zu garantieren, dass χ_1 und $\overline{\chi_1}$ innerhalb dieser N Charaktere auftreten. Wähle zu jedem Charakter $\chi^{(j)}$ eine entsprechende Nullstelle $\rho^{(j)}$ aus

$$\sigma \ge 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda, \qquad |t| \le l(q),$$

wobei wir für $\chi^{(j)} = \chi_1$ die Nullstelle ρ_1 wählen und, falls χ_1 komplex, für $\chi^{(j)} = \overline{\chi_1}$ die Nullstelle $\overline{\rho_1}$.

Wegen $\lambda_1 \le \lambda_{12}$ gibt es unter den N Charakteren (mindestens) $m(\chi_1)$ Stück, für die $\lambda^{(j)} \le \lambda_{12}$ gilt. Zusätzlich gibt es nach Voraussetzung $(\max\{B_1, m(\chi_1)\} - m(\chi_1))$ weitere Charaktere, für die $\lambda^{(j)} \le b$ gilt und $(\max\{D_1, B_1, m(\chi_1)\} - \max\{B_1, m(\chi_1)\})$ weitere für die $\lambda^{(j)} \le d$ gilt.

Für alle restlichen j benutzen wir $\lambda^{(j)} \leq \lambda$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $b \leq d \leq \lambda$, folgt aus Monotoniegründen

$$\mathscr{L}\Big((N-D_1)F(\lambda-\lambda^\star)+(D_1-B_1)F(d-\lambda^\star)$$
$$+(B_1-m(\chi_1))F(b-\lambda^\star)+m(\chi_1)F(\lambda_{12}-\lambda^\star)-N(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)-E(\chi_1)\cdot C\Big)$$

$$\leq \mathscr{L}\Big((N-\max\{D_1,B_1,m(\chi_1)\})F(\lambda-\lambda^\star)+(\max\{D_1,B_1,m(\chi_1)\}-\max\{B_1,m(\chi_1)\})F(d-\lambda^\star)$$
$$+(\max\{B_1,m(\chi_1)\}-m(\chi_1))F(b-\lambda^\star)+m(\chi_1)F(\lambda_{12}-\lambda^\star)-N(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)-E(\chi_1)\cdot C\Big)$$

$$\leq \mathscr{L}\left(\sum_{j\leq N} F(\lambda^{(j)}-\lambda^\star)-N(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)-E(\chi_1)\cdot C\right) \tag{5.34}$$

Für $N \geq 1$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist nach Voraussetzung

$$0 \leq N\cdot\left(F(\lambda-\lambda^\star)-(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)\right)-E(\chi_1)\cdot C.$$

Also ist auch das erste Glied der Ungleichungskette (5.34) nicht-negativ.

Da $\rho^{(j)} \in R$ $(j=1,\dots,N)$, folgt aus Lemma 3.4 mit $\beta^\star = 1-\mathscr{L}^{-1}\lambda^\star$

$$K(\beta^\star+i\gamma^{(j)},\chi^{(j)}) \leq \begin{cases} -\mathscr{L}F(\lambda^{(j)}-\lambda^\star)+\mathscr{L}\cdot E(\chi_1)\cdot C+\mathscr{L}\left(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon\right) & \text{falls } \chi^{(j)}=\chi_1, \\ -\mathscr{L}F(\lambda^{(j)}-\lambda^\star)+\mathscr{L}\left(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon\right) & \text{sonst.}\end{cases}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&\left(\sum_{j\leq N} F(\lambda^{(j)}-\lambda^\star)-N(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)-E(\chi_1)\cdot C\right) \qquad (5.35)\\ &\leq -\sum_{j\leq N} K(\beta^\star+i\gamma^{(j)},\chi^{(j)})\\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\beta^\star}f(\mathscr{L}^{-1}\log n)\Re\left\{\sum_{j\leq N}\frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}}\right\}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\beta^\star}f(\mathscr{L}^{-1}\log n)\left|\sum_{j\leq N}\frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}}\right|.\end{aligned}$$

Kombiniert man (5.34) und (5.35) und wendet man die Cauchy Schwarz Ungleichung an so folgt

$$\mathscr{L}^2\Big((N-D_1)F(\lambda-\lambda^\star)+(D_1-B_1)F(d-\lambda^\star)+(B_1-m(\chi_1))F(b-\lambda^\star)$$
$$+m(\chi_1)F(\lambda_{12}-\lambda^\star)-N(\frac{f(0)}{6}+\varepsilon)-E(\chi_1)\cdot C\Big)^2 \leq \Sigma_1\Sigma_2, \tag{5.36}$$

wobei

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi_0(n)n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1}\log n) = K(\beta^\star, \chi_0)$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1}\log n) \left| \sum_{j\le N} \frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}} \right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1}\log n) \sum_{j,k\le N} \frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}} \frac{\overline{\chi^{(k)}}(n)}{n^{-i\gamma^{(k)}}} \\
&= \sum_{j,k\le N} K(\beta^\star + i(\gamma^{(j)} - \gamma^{(k)}), \chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}}).
\end{aligned}$$

Für Σ_1 und die N Terme aus Σ_2 mit $j = k$ gilt nach Lemma 3.1

$$K(\beta^\star, \chi_0) \le \mathscr{L}(F(-\lambda^\star) + \varepsilon). \tag{5.37}$$

Es verbleibt die Abschätzung der restlichen $N^2 - N$ Terme in Σ_2 mit $j \ne k$. Wir untersuchen, wann der Charakter $\chi = \chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}}$ gleich χ_1 oder $\overline{\chi_1}$ ist. Wähle dazu ein festes j und betrachte die $N-1$ Charaktere $\chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}}$ mit $k \ne j$. Ist $\chi^{(j)} \ne \chi_1, \overline{\chi_1}$, dann kann höchstens einer von den $N-1$ Charakteren gleich χ_1 sein und höchstens einer gleich $\overline{\chi_1}$, da $\chi^{(k)} \ne \chi^{(k')}$ für $k \ne k'$. Ist $\chi^{(j)} = \chi_1$, dann kann keiner von den $N-1$ Charakteren gleich χ_1 sein und höchstens einer gleich $\overline{\chi_1}$. Analog gilt für $\chi^{(j)} = \overline{\chi_1}$, dass keiner der betrachteten Charaktere gleich $\overline{\chi_1}$ ist und höchstens einer gleich χ_1. Es folgt, dass es höchstens

$$\begin{cases} N-1 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell,} \\ 2N-2 & \text{falls } \chi_1 \text{ komplex} \end{cases}$$

verschiedene Paare (j,k) mit $j \ne k$ gibt, so dass $\chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}} \in \{\chi_1, \overline{\chi_1}\}$. Für die zum Charakter χ gehörige Menge A_1 aus Lemma 3.4 gilt

$$A_1 \subseteq \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \chi \ne \chi_1, \overline{\chi_1}, \\ \{\rho_1\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ reell, } \rho_1 \text{ reell,} \\ \{\rho_1, \overline{\rho_1}\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ reell, } \rho_1 \text{ komplex,} \\ \{\rho_1\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ komplex,} \\ \{\overline{\rho_1}\} & \text{falls } \chi = \overline{\chi_1} \text{ und } \chi_1 \text{ komplex.} \end{cases}$$

Insgesamt folgt also unter Berücksichtigung von (3.38), dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j,k\le N \\ j\ne k}} K(\beta^\star + i(\gamma^{(j)} - \gamma^{(k)}), \chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}}) \\
&\qquad \le \mathscr{L} \cdot G \cdot \sup_{t\in\mathbb{R}} \{-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\}\} + \mathscr{L}(N^2 - N)(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon),
\end{aligned} \tag{5.38}$$

wobei

$$G = \begin{cases} N-1 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell und } \rho_1 \text{ reell,} \\ 2N-2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der Beschränkungen an die Parameter sind auch N, f und F beschränkt. Dabei ist

$$\widetilde{N}(\lambda) \leq \sum_{\chi} N(1 - 2\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{L}, \chi)$$

beschränkt gemäß (6.56). Ersetzen wir also ε durch einen hinreichend kleinen positiven Wert, dann folgt aus (5.36), (5.37) und (5.38)

$$\begin{aligned} 0 \leq F(-\lambda^\star) \left(NF(-\lambda^\star) + (N^2 - N)\frac{f(0)}{6} + (2N-2)C \right) \\ - \Big((N - D_1)F(\lambda - \lambda^\star) + (D_1 - B_1)F(d - \lambda^\star) + (B_1 - m(\chi_1))F(b - \lambda^\star) \\ + m(\chi_1)F(\lambda_{12} - \lambda^\star) - N\frac{f(0)}{6} - E(\chi_1) \cdot C \Big)^2 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Die rechte Seite von (5.39) ist gleich

$$a_1 N^2 + a_2 N + a_3 + \varepsilon.$$

Wegen $a_1 < 0$ folgt unter der Anfangsvoraussetzung $N \geq 1$, dass

$$N(\lambda) \leq N \leq \frac{a_2 + \sqrt{|a_2^2 - 4a_1a_3|}}{-2a_1} + \varepsilon. \tag{5.40}$$

Die Betragsstriche könnte man weglassen, aber man verliert durch sie auch nichts, da der entsprechende Term in der Anwendung immer positiv ist. Ist außerdem die rechte Seite von (5.40) echt kleiner als 1, dann ist dies ein Widerspruch, also $N = 0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ folgt (5.33). □

Kapitel 6

Beweis von Theorem 2.1 und 2.2

6.1 Wahl von h und f_1

Wir benutzen in diesem Abschnitt vermehrt die Schreibweise $\cos ab = \cos(ab)$, $\cosh ab = \cosh(ab)$ und $\sinh ab = \sinh(ab)$.

Wir werden Theorem 2.1 ausgehend von der Ungleichung (3.57) beweisen. Zur Abschätzung der Summe in dieser Ungleichung verwenden wir Lemma 3.10. Dazu müssen wir Funktionen $h(t)$ und $H_2(z)$ wählen und eine passende Funktion $f_1(t)$ finden. Dieser Abschnitt widmet sich dieser Aufgabe.

Heath-Brown verwendet $h(t) = h_{L,K}(t)$ (siehe (3.51)), $H_2(z) = ((1 - e^{-Kz})/z)^2$ und

$$f_1^\lambda(t) = \begin{cases} \sinh(K-t)\lambda & \text{falls } 0 \le t \le K, \\ 0 & \text{falls } t \ge K. \end{cases}$$

Wir benutzen stattdessen eine endliche Linearkombination $h(t) = \sum_i h_{L_i,K_i}(t)$. Um unsere Vorgehensweise zu vereinfachen, bzw. teils um sie erst zu ermöglichen, arbeiten wir nicht mit beliebigen Linearkombinationen sondern betrachten nur solche, deren Laplace-Transformierte H die Gleichung

$$H(z) = \begin{cases} e^{-(L-2K)z}\left(z^{-1}(1 + \sum_{i=1}^M \beta_i e^{K_i z})(1 - e^{-Kz})\right)^2 & \text{falls } z \neq 0 \\ \\ K^2(1 + \sum_{i=1}^M \beta_i)^2 & \text{falls } z = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

erfüllt für gewisse Parameter $M \in \mathbb{N}$, $\beta_i \ge 0$ und $0 \le K_i \le K_{i+1}$ $(i = 1, \dots, M-1)$. Solch passende Linearkombinationen existieren auf Grund von (3.54). Im Fall $M = 2$, und nur diesen betrachten wir[1], erfüllt die Laplace-Transformierte von

$$\begin{aligned} h(t) = h_{L,K}(t) &+ \beta_1^2 h_{L-2K_1,K}(t) + \beta_2^2 h_{L-2K_2,K}(t) \\ &+ 2\beta_1 h_{L-K_1,K}(t) + 2\beta_2 h_{L-K_2,K}(t) + 2\beta_1\beta_2 h_{L-K_1-K_2,K}(t) \end{aligned} \tag{6.2}$$

die Gleichung (6.1). Wir setzen voraus, dass

$$L - 2K - 2K_2 - 3 > 0, \tag{6.3}$$

um später für dieses h die Ungleichung (3.57) anwenden zu können. Zu der Funktion h aus (6.2) - sei H dessen Laplace-Transformierte - gilt es jetzt passende Funktionen f_1^λ herzuleiten, die die

[1]Der Gewinn, der aus einem größeren M resultieren würde, ist unserer Analyse zu Folge sehr klein.

Bedingungen aus Lemma 3.10 erfüllen. Wir setzen dabei

$$H_2(z) = e^{(L-2K-2K_2)z} H(z). \tag{6.4}$$

Wegen $K_2 \geq K_1$ geht $H_2(z)$ für $\Re\{z\} \geq 0$ und $|z| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0. Für $\lambda > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|H_2(\lambda + it)| = \frac{e^{-2K_2\lambda}}{\lambda^2 + t^2} \cdot H_0(\lambda, t)$$

mit

$$\begin{aligned} H_0(\lambda, t) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos Kt + \sum_{i=1,2} \Big(\gamma_{2i} \cos K_i t + \gamma_{3i}(\cos(K + K_i)t + \cos(K - K_i)t) \Big) \\ + \gamma_4 \cos(K_1 - K_2)t + \gamma_5 \Big(\cos(K + K_1 - K_2)t + \cos(K - K_1 + K_2)t \Big) \end{aligned}$$

und

$$\gamma_0 = \gamma_0(\lambda) = (1 + e^{-2K\lambda})(1 + \sum_{i=1,2} \beta_i^2 e^{2K_i\lambda}), \tag{6.5}$$

$$\gamma_1 = \gamma_1(\lambda) = -2(e^{-K\lambda} + \sum_{i=1,2} \beta_i^2 e^{(2K_i - K)\lambda}), \tag{6.6}$$

$$\gamma_{2i} = \gamma_{2i}(\lambda) = 4\beta_i e^{(K_i - K)\lambda} \cosh K\lambda \qquad (i \in \{1, 2\}), \tag{6.7}$$

$$\gamma_{3i} = \gamma_{3i}(\lambda) = -2\beta_i e^{(K_i - K)\lambda} \qquad (i \in \{1, 2\}), \tag{6.8}$$

$$\gamma_4 = \gamma_4(\lambda) = 4\beta_1\beta_2 e^{(K_1 + K_2 - K)\lambda} \cosh K\lambda, \tag{6.9}$$

$$\gamma_5 = \gamma_5(\lambda) = -2\beta_1\beta_2 e^{(K_1 + K_2 - K)\lambda}. \tag{6.10}$$

Sei ein festes $\lambda > 0$ gegeben. Wir benötigen ein $f_1 = f_1^\lambda$, so dass

$$\frac{e^{-2K_2\lambda}}{\lambda^2 + t^2} \cdot H_0(\lambda, t) = \Re\{F_1(it)\} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.11}$$

Finden wir „Elementarfunktionen" f_1, für die gilt $\Re\{F_1(it)\} = (\lambda^2 + t^2)^{-1} \cos Ct$, und solche mit $\Re\{F_1(it)\} = (\lambda^2 + t^2)^{-1}$, so lässt sich durch passende Kombination das Gewünschte erreichen. Nun ist beides mit einem vernachlässigbaren Fehler möglich. Erfreulicherweise erweist es sich jedoch bereits als hinreichend lediglich die folgenden Bausteine zu verwenden ($C \in \mathbb{R}$):

$$f_1^C(t) = \begin{cases} \frac{-1}{\lambda} \sinh(|C| - t)\lambda & \text{falls } 0 \leq t \leq |C|, \\ 0 & \text{falls } t \geq |C|. \end{cases} \tag{6.12}$$

Diese Funktionen erfüllen Bedingung 1 und es gilt für deren Laplace-Transformierte

$$F_1^C(z) = \frac{(z - \lambda)e^{|C|\lambda} - (z + \lambda)e^{-|C|\lambda} + 2\lambda e^{-|C|z}}{2\lambda(\lambda^2 - z^2)} \tag{6.13}$$

und

$$\Re\{F_1^C(it)\} = \frac{\cos Ct - \cosh C\lambda}{\lambda^2 + t^2}. \tag{6.14}$$

Wählt man

$$f_1(t) = e^{-2K_2\lambda}\Big\{\gamma_1 f_1^K(t) + \sum_{i=1,2}\Big(\gamma_{2i} f_1^{K_i}(t) + \gamma_{3i}(f_1^{K+K_i}(t) + f_1^{K-K_i}(t))\Big) + \gamma_4 f_1^{K_1-K_2}(t) + \gamma_5(f_1^{K+K_1-K_2}(t) + f_1^{K-K_1+K_2}(t))\Big\} \quad (6.15)$$

dann ist aufgrund von (6.14) und der Beziehung

$$-\gamma_0 = \gamma_1 \cosh K\lambda + \sum_{i=1,2}\Big(\gamma_{2i}\cosh K_i\lambda + \gamma_{3i}\Big(\cosh(K+K_i)\lambda + \cosh(K-K_i)\lambda\Big)\Big) + \gamma_4\cosh(K_1-K_2)\lambda + \gamma_5\Big(\cosh(K+K_1-K_2)\lambda + \cosh(K-K_1+K_2)\lambda\Big)$$

die Gleichung (6.11) erfüllt. Aus (6.13) folgt, dass $F_1(z)$ für $\Re\{z\} \geq 0$ und $|z| \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 geht. Schließlich gilt

$$0 \leq e^{-2K_2\lambda}\gamma_1 f_1^K(t) =: f_{1,1}(t) \quad (6.16)$$

und wegen der für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gültigen Beziehung

$$\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}(\sinh(x+y) + \sinh(x-y)), \quad (6.17)$$

dass für $i \in \{1, 2\}$

$$0 \leq e^{-2K_2\lambda}\Big(\gamma_{2i} f_1^{K_i}(t) + \gamma_{3i}(f_1^{K+K_i}(t) + f_1^{K-K_i}(t))\Big) =: f_{1,2i}(t) \quad (6.18)$$

und

$$0 \leq e^{-2K_2\lambda}\Big(\gamma_4 f_1^{K_1-K_2}(t) + \gamma_5(f_1^{K+K_1-K_2}(t) + f_1^{K-K_1+K_2,\lambda}(t))\Big) =: f_{1,3}(t). \quad (6.19)$$

Insgesamt gilt also $f_1(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

Wir fassen zusammen: Seien beliebige positive Konstanten L, K und nicht-negative Konstanten K_1, K_2, β_1 und β_2 mit $K_1 \leq K_2$ gegeben. Die Voraussetzung (6.3) sei erfüllt. Dann können wir in Lemma 3.10 die Funktion H_2 aus (6.4) anwenden zusammen mit der Funktion f_1 aus (6.15).

6.2 Ein vorbereitendes Lemma

Für den Beweis von Theorem 2.1 benutzen wir [23, Lemma 15.1]. Wir verändern dabei die Herleitung dieses Lemmas dahingehend, dass wir anstelle von [23, Lemma 11.1] und [23, Lemma 13.3] die Lemmata 5.1 und 3.10 zusammen mit den Ausführungen aus §6.1 benutzen. Wir werden im Folgenden die entsprechenden Anpassungen an den Argumenten erläutern.

Zuerst führen wir einige Bezeichnungen ein. Seien L,$K > 0$ und K_1,K_2,β_1,$\beta_2 \geq 0$ Konstanten mit $K_1 \leq K_2$ und $L - 2K - 2K_2 > 3$. Wir verwenden $h(t)$, welches mittels (6.2) und (3.51) definiert ist. Die entsprechende Laplace-Transformierte $H(z)$ ist gegeben durch (6.1) mit $M = 2$. Wir verwenden auch die Funktion $H_2(z)$, welche durch (6.4) gegeben ist. Weiterhin sei $f_1^\lambda(t)$ gegeben durch (6.15), (6.6) - (6.10) und (6.12). $F_1^\lambda(z)$ sei die entsprechende Laplace-Transformierte. Ferner sei θ eine reelle Konstante und ε, Λ, c_1, c_2 und δ positive Konstanten. Sei $C_0 = C_0(\varepsilon)$ die für die Formulierung der Ungleichung (3.57) benutzte Konstante, u_i ($i \in \{1, \ldots, 10\}$) und x wie in Lemma 5.1 (wähle dort $M = 10$) und $\varepsilon_0 = 10^{-7}$. Schließlich seien α_i ($i \in \{1, \ldots, 10\}$) die zu $M = 10$ gehörigen Konstanten aus (5.16). Setze

$$\Sigma = \sum_{p \equiv a \pmod q} \frac{\log p}{p} h(\mathscr{L}^{-1} \log p),$$

$$R_0 = \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 - \mathscr{L}^{-1} C_0 \leq \sigma \leq 1, \ |t| \leq \mathscr{L}^{-1} C_0\},$$

$$w_0(t) = e^{-\frac{\theta}{2} t} \min\{t - u_0 + \varepsilon_0, u_{10} - u_0 + \varepsilon_0\}^{\frac{1}{4}}, \tag{6.20}$$

$$w(s) = \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2st} \, dt \right)^{-1}, \tag{6.21}$$

$$B(\lambda) = H(0)^{-1} \left(F_1^{\lambda}(-\lambda) + \frac{f_1^{\lambda}(0)}{6} \right), \tag{6.22}$$

$$A(\chi_1) = \begin{cases} \max\{0, (e^{-(L-2K-2K_2)\lambda_1} - e^{-(L-2K-2K_2)\lambda'})(B(\lambda_1) - \frac{\alpha(\chi_1) H_2(\lambda_1)}{H(0)})\} & \text{falls } \rho_1 \in R_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\alpha(\chi_1) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell und } \rho_1 \text{ komplex,} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{6.23}$$

$$n(\chi_1) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \chi_1 \text{ komplex,} \\ 1 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell,} \end{cases} \tag{6.24}$$

$$C(\lambda) = w(\lambda) \left(e^{-(L-2K-2K_2)\lambda} \frac{B(\lambda)}{w(\lambda)} - e^{-(L-2K-2K_2)\Lambda} \frac{B(\Lambda)}{w(\Lambda)} \right), \tag{6.25}$$

$$\lambda_{31}^{\star} = \min(\Lambda, \lambda_{31}) \qquad \text{(für ein } \lambda_{31} > 0, \text{ welches } \lambda_{31} \leq \lambda_3 \text{ erfüllt),} \tag{6.26}$$

$$\lambda_2^{\star} = \min\{\lambda_2, \lambda_{31}^{\star}\},$$

$$\lambda_1^{\star} = \begin{cases} \min\{\lambda_1, \lambda_{31}^{\star}\} & \text{falls } \rho_1 \in R_0, \\ \min\{\lambda', \lambda_{31}^{\star}\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Lambda_r = \Lambda - \delta r \tag{6.27}$$

und

$$s = [\delta^{-1}(\Lambda - \lambda_{31}^{\star})]. \tag{6.28}$$

Wenn ρ' nicht existiert, so vereinbaren wir $\lambda' = \infty$ und definieren in diesem Zusammenhang

$e^{-\infty} = 0$ und $C(\infty) = 0$. Schließlich werden wir auch gewisse Abschätzungen

$$N(\Lambda_j) \leq N_0(\Lambda_j) \tag{6.29}$$

benötigen mit konkreten Werten $N_0(\Lambda_j)$ für $j = 0, \ldots, s$.

Wir verwenden die in §3.2.2 eingeführten Charaktere $\chi^{(k)}$ für $k \in \{1, \ldots, N(\lambda_0)\}$ und $\lambda_0 = \frac{1}{3} \log\log \mathscr{L}$. Zu jedem Charakter wählen wir eine Nullstelle $\rho^{(k)}$ mit

$$\Re\{\rho^{(k)}\} = \max\{\Re\{\rho\} \mid L(\rho, \chi^{(k)}) = 0,\ \ \Re\{\rho\} \geq 1 - \lambda_0 \mathscr{L}^{-1},\ \ |\Im\{\rho\}| \leq 1\}.$$

In Kapitel 4 haben wir Abschätzungen für die Nullstellen ρ_k und ρ' in $R = R(l(q))$ bewiesen. Nun gilt für hinreichend große q

$$R \supseteq \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda_0 \leq \sigma \leq 1,\ |t| \leq 1\} \supseteq R_0. \tag{6.30}$$

Also haben wir insbesondere auch Abschätzungen für die $\rho^{(k)}$ sowie für Nullstellen $\rho \in R_0$.

Die Ausgangslage für den Beweis von Theorem 2.1 ist die Ungleichung (3.57), also

$$\frac{H(0)^{-1}\varphi(q)}{\mathscr{L}} \Sigma \geq 1 - H(0)^{-1} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\substack{\rho \\ \rho \in R_0}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| - \varepsilon. \tag{6.31}$$

Ziel ist es die letzte rechte Seite so in Abhängigkeit der $\lambda^{(k)}$ nach unten abzuschätzen, dass man die in Kapitel 4 und 5 bewiesenen Resultate einspeisen und schließlich $\Sigma > 0$ folgern kann. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass im Folgenden die Existenz gewisser Nullstellen benutzt wird. Wenn diese nicht existieren würden, so wird ersichtlich sein, dass noch bessere Abschätzungen folgen würden. Wenn beispielsweise ρ_1 nicht existiert, so liefert (6.31) sofort die zulässige Linniksche Konstante $L = 3 + \varepsilon$ (wähle dazu $K = \varepsilon/3$ und $K_1 = K_2 = 0$) bzw. $L = 2.4 + \varepsilon$, wenn man in der Herleitung von (6.31) etwas genauer vorgegangen wäre.

Zuerst wird in (6.31) die Summation über „viele" Nullstellen für jeden Charakter reduziert auf eine Summe über jeweils eine Nullstelle, nämlich $\rho^{(k)}$, für jeden Charakter. Wir verwenden dazu das anfangs erwähnte $H_2(z)$, die Beziehung

$$|H(z)| = e^{-(L-2K-2K_2)\Re\{z\}} |H_2(z)|,$$

und Lemma 3.10. Dies führt zu (vergleiche Herleitung von [23, (15.1)]):

$$H(0)^{-1} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\substack{\rho \\ \rho \in R_0}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \leq \sum_k e^{-(L-2K-2K_2)\lambda^{(k)}} B(\lambda^{(k)}) - n(\chi_1)A(\chi_1) + \varepsilon, \tag{6.32}$$

wobei die Summation in der rechten Summe über alle weiter oben erwähnten Nullstellen $\rho^{(k)}$ läuft. In [23, §15] wird der Fall $\rho_1 \notin R_0$ nicht explizit erwähnt. Zwar liefert dieser Fall letztendlich bessere Ergebnisse. Jedoch erscheint es uns notwendig ihn zu berücksichtigen, indem wir dann, wie getan, $A(\chi_1) = 0$ setzen. Ansonsten könnte (6.32) nicht gelten, wenn z.B. keine $\rho^{(k)}$ existieren, aber ρ_1 schon.

Die Summe auf der rechten Seite von (6.32) kann in drei Bereiche aufgeteilt werden gemäß $\lambda^{(k)} < \lambda_{31}^{\star}$, $\lambda_{31}^{\star} \leq \lambda^{(k)} \leq \Lambda$ und $\lambda^{(k)} > \Lambda$. Der erste Bereich wird mit Hilfe der bewiesenen λ_2-Abschätzungen behandelt. Der zweite Bereich mit Hilfe der λ_3-Abschätzungen und Lemma 5.3 und der dritte Bereich mittels Lemma 5.1. Die λ'-Abschätzungen werden in den bereits erwähnten Term $A(\chi_1)$ mit einfließen.

Wir beginnen mit der Behandlung des dritten Bereichs. Anstelle der in [23, S.329] benutzten Funktion

$$w(s) = \frac{s}{e^{\frac{73}{30}s} - e^{\frac{16}{15}s}}$$

verwenden wir $w(s)$ aus (6.21). Die dazu benutzte Funktion $w_0(t)$ wird in Verbesserungspotential 7 vorgeschlagen [23, S.337] und ist in einem verwandten Zusammenhang optimal. Durch eine kleine Zusatzüberlegung könnte man das ε_0 in der Definition von $w_0(t)$ streichen doch dies sparen wir uns. Für ein minimal besseres $w_0(t)$ siehe §7.4.

Wir benötigen, dass $e^{-(L-2K-2K_2)\lambda}B(\lambda)/w(\lambda)$ monoton fallend in λ ist. Dies gilt offensichtlich, falls

$$L - 2K - 2K_2 \geq 2x \tag{6.33}$$

und $B(\lambda)$ monoton fallend ist. Die Funktion $B(\lambda)$ ist wiederum monoton fallend, falls für alle festen $t \geq 0$ der Ausdruck $e^{\lambda t} f_1^\lambda(t)$ monoton fallend in λ ist. Dafür genügt es zu Zeigen, dass (Bezeichnungen aus (6.16), (6.18), (6.19))

$$e^{\lambda t} f_{1,1}^\lambda(t), \quad e^{\lambda t} f_{1,2i}^\lambda(t) \quad (i \in \{1,2\}) \quad \text{ und } \quad e^{\lambda t} f_{1,3}^\lambda(t)$$

für festes $t \geq 0$ jeweils monoton fallend in λ ist. Die dafür notwendigen Rechnungen werden leichter, wenn man

$$K_1 = K, \quad K_2 = 2K \tag{6.34}$$

setzt, was wir hiermit tun. Diese Wahl erweist sich später ohnehin als näherungsweise optimal. Es gilt

$$e^{\lambda t} f_{1,1}^\lambda(t) = \begin{cases} \left(e^{-4K\lambda} + \beta_1^2 e^{-2K\lambda} + \beta_2^2\right)(1 - e^{-2(K-t)\lambda})\lambda^{-1} & \text{falls } 0 \leq t \leq K, \\ 0 & \text{falls } K \leq t, \end{cases}$$

$$e^{\lambda t} f_{1,2i}^\lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq t \leq K_i - K \\ \beta_i e^{-2(2K-t)\lambda}(1 - e^{-2(t-K_i+K)\lambda})\lambda^{-1} & \text{falls } K_i - K \leq t \leq K_i, \\ \beta_i e^{-2(2K-K_i)\lambda}(1 - e^{-2(K_i+K-t)\lambda})\lambda^{-1} & \text{falls } K_i \leq t \leq K_i + K, \\ 0 & \text{falls } K_i + K \leq t, \end{cases}$$

und

$$e^{\lambda t} f_{1,3}^\lambda(t) = \begin{cases} \beta_1\beta_2 e^{-2(K-t)\lambda}(1 - e^{-2t\lambda})\lambda^{-1} & \text{falls } 0 \leq t \leq K, \\ \beta_1\beta_2(1 - e^{-2(2K-t)\lambda})\lambda^{-1} & \text{falls } K \leq t \leq 2K, \\ 0 & \text{falls } 2K \leq t. \end{cases}$$

Da $(1 - e^{-\lambda})\lambda^{-1}$ monoton fallend ist, folgt die gewünschte Monotonie. Mit Lemma 5.1 (setze dort $M = 10$) bekommt man aus (6.32) wortwörtlich analog zur Herleitung von [23, (15.3)]

$$\begin{aligned} H(0)^{-1} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\substack{\rho \\ \rho \in R_0}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \\ \leq \frac{100}{c_1 c_2^2} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^x w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\}\, dt \cdot \frac{e^{-(L-6K)\Lambda} B(\Lambda)}{w(\Lambda)} \\ + \sum_{\lambda^{(k)} \leq \Lambda} C(\lambda^{(k)}) - n(\chi_1)A(\chi_1) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Die Funktion $w(\lambda)$ ist offensichtlich monoton fallend und nicht-negativ. Also gilt in $[0, \Lambda]$ das gleiche auch für $C(\lambda)$ als Produkt zweier nicht-negativer monoton fallender Funktionen. Weiterhin beachte man, dass das s in (6.28) so gewählt ist, dass $\Lambda_{s+1} < \lambda_{31}^\star \leq \Lambda_s$. Man erhält gemäß den Ausführungen in [23, S.330]

$$\sum_{\lambda^{(k)}\le\Lambda} C(\lambda^{(k)}) \le \sum_{r=0}^{s-1}(N_0(\Lambda_r)-N_0(\Lambda_{r+1}))C(\Lambda_{r+1}) \\ + n(\chi_1)(C(\lambda_1^\star)-C(\lambda_{31}^\star)) + 2(C(\lambda_2^\star)-C(\lambda_{31}^\star)) + N_0(\Lambda_s)C(\lambda_{31}^\star).$$

Am besten zeigt man dies wohl zunächst für den „Normalfall“

$$\lambda_1,\lambda_2 \le \lambda_{31} \le \Lambda \quad \text{und} \quad \rho_1,\rho_2,\rho_3 \in \{\rho^{(1)},\dots,\rho^{(N(\lambda_0))}\}.$$

Für die verbliebenen Sonderfälle überlegt man sich dann, dass die Abschätzung weiterhin gültig bleibt. Es folgt

Lemma 6.1 (vergleiche Lemma 15.1 in [23])**.** *Wir benutzen die Bezeichnungen, welche von Beginn dieses Paragraphen bis einschließlich (6.29) eingeführt wurden.*

Seien L, K, c_1, c_2, Λ, δ und ε positive Konstanten mit $L-6K > \max\{3, 2x\}$. Seien ferner β_1, β_2 zwei nicht-negative Konstanten und θ eine reelle Konstante. Dann gibt es ein effektiv berechenbares q_0, welches von den benutzten Konstanten abhängt, so dass für $q \ge q_0$

$$H(0)^{-1}\sum_{\chi\ne\chi_0}\sum_{\substack{\rho\\ \rho\in R_0}}|H((1-\rho)\mathscr{L})| \\ \le \frac{100}{c_1c_2^2}\sum_{i=1}^{10}\alpha_i^2\int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2}\min\{t-u_{i-1},u_i-u_{i-1}\}\,dt\cdot\frac{e^{-(L-6K)\Lambda}B(\Lambda)}{w(\Lambda)} \\ + \sum_{r=0}^{s-1}(N_0(\Lambda_r)-N_0(\Lambda_{r+1}))C(\Lambda_{r+1}) + n(\chi_1)(C(\lambda_1^\star)-C(\lambda_{31}^\star)-A(\chi_1)) \\ + 2(C(\lambda_2^\star)-C(\lambda_{31}^\star)) + N_0(\Lambda_s)C(\lambda_{31}^\star)+\varepsilon. \tag{6.36}$$

Um aus der Ungleichung (6.31) das Theorem 2.1 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für $L=5$ die rechte Seite von (6.36) echt kleiner als 1 ist. Betrachte den Fall

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11},\lambda_{12}] \tag{6.37}$$

für zwei Konstanten λ_{11}, λ_{12} mit $0<\lambda_{11}\le\lambda_{12}\le\infty$. Angenommen, wir haben vermöge Kapitel 4 und/oder [23] explizite Abschätzungen

$$\lambda' \ge \lambda'_{11}, \quad \lambda_2 \ge \lambda_{21}, \quad \lambda_3 \ge \lambda_{31}. \tag{6.38}$$

Dann setzen wir

$$\lambda^\star = \min\{\lambda'_{11},\lambda_{21}\} \tag{6.39}$$

und benutzen die folgenden Parameter, welche sich als näherungsweise optimal herausstellen:

$$L=5, \qquad K=0.13, \qquad \theta=1.15, \qquad c_1=0.11, \qquad c_2=0.27, \tag{6.40}$$

$$\beta_1=0.65, \qquad \beta_2=0.33, \qquad \Lambda=1.11+0.35\lambda^\star, \qquad \varepsilon=10^{-7}. \tag{6.41}$$

Den verbliebenen Parameter δ legen wir später fest. Definiere

$$\lambda_{11}^\star = \min\{\lambda_{11},\lambda_{31}^\star\}, \qquad \lambda_{12}^\star=\min\{\lambda_{12},\lambda_{31}^\star\}, \tag{6.42}$$

$$\lambda_{11}^\star{}' = \min\{\lambda'_{11},\lambda_{31}^\star\}, \qquad \lambda_{21}^\star=\min\{\lambda_{21},\lambda_{31}^\star\}. \tag{6.43}$$

Es gilt $C(\lambda_2^\star) \leq C(\lambda_{21}^\star)$. Es verbleibt noch die Abschätzung von $n(\chi_1)(C(\lambda_1^\star) - A(\chi_1))$. Wenn $\rho_1 \in R_0$ und $\lambda_1^\star = \lambda_1$, dann ist

$$\begin{aligned} C(\lambda_1^\star) - A(\chi_1) \leq e^{-(L-6K)\lambda'} B(\lambda_{11}) - e^{-(L-6K)\Lambda} B(\Lambda) \frac{w(\lambda_{12}^\star)}{w(\Lambda)} \\ + \alpha(\chi_1) H(0)^{-1} H_2(\lambda_{11})(e^{-(L-6K)\lambda_{11}} - e^{-(L-6K)\lambda'}). \end{aligned}$$

Ist $\lambda_1^\star = \lambda_{31}^\star$, dann benutzen wir

$$C(\lambda_1^\star) - A(\chi_1) \leq C(\lambda_{31}^\star).$$

Ist schließlich $\lambda_1^\star = \lambda'$, dann folgt

$$C(\lambda_1^\star) - A(\chi_1) \leq C(\lambda_{11}').$$

In allen drei Fällen gilt also

$$\begin{aligned} C(\lambda_1^\star) - A(\chi_1) \leq \max \Big\{ C(\lambda_{11}^\star{}'), e^{-(L-6K)\lambda_{11}'} \max \big\{0, B(\lambda_{11}) - \alpha(\chi_1) H(0)^{-1} H_2(\lambda_{11})\big\} \\ - e^{-(L-6K)\Lambda} B(\Lambda) \frac{w(\lambda_{12}^\star)}{w(\Lambda)} + \alpha(\chi_1) H(0)^{-1} H_2(\lambda_{11}) e^{-(L-6K)\lambda_{11}} \Big\} =: D. \end{aligned}$$

Man erhält die folgende konkrete obere Abschätzung der rechten Seite von (6.36):

$$\begin{aligned} W = \frac{100}{c_1 c_2^2} \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\}\, dt \cdot \frac{e^{-(L-6K)\Lambda} B(\Lambda)}{w(\Lambda)} \\ + \sum_{r=0}^{s-1} (N_0(\Lambda_r) - N_0(\Lambda_{r+1})) C(\Lambda_{r+1}) + (N_0(\Lambda_s) - n(\chi_1) - 2) C(\lambda_{31}^\star) \\ + 2C(\lambda_{21}^\star) + n(\chi_1) \cdot D + 10^{-7}. \end{aligned} \tag{6.44}$$

Wir fassen zusammen wie wir nun vorgehen müssen. Beginne mit einem Fall, gegeben durch (6.37) und ggf. ein paar zusätzlichen Voraussetzungen (z.B. χ_1 und ρ_1 beide reell). Leite Abschätzungen vom Typ (6.29) her mittels Lemma 5.3 (siehe dazu den nächsten Abschnitt) und benutze die Abschätzungen vom Typ (6.38), welche durch die Tabellen in dieser Arbeit und [23] gegeben sind. Wähle schließlich ein $\delta > 0$, sowie die Parameter aus (6.40), (6.41) und die Bezeichnungen aus (6.20)-(6.28) und (6.42)-(6.43). Ist dann das W aus (6.44) kleiner als 1, dann ist Theorem 2.1 für den speziellen Fall, der anfangs angenommen wurde, bewiesen. Im nächsten Abschnitt erklären wir wie die Abschätzungen $N_0(\Lambda_r)$ gewählt werden. Dabei werden wir eine weitere Aufteilung in verschiedene Unterfälle einführen.

6.3 Abschätzungen von $N(\Lambda_r)$

Angenommen, wir befinden uns im Fall (6.37). Zur Berechnung des W aus (6.44) benötigen wir obere Abschätzungen $N_0(\Lambda_r) \geq N(\Lambda_r)$ für $r = 0, \ldots, s$. In diesem Abschnitt erläutern wir, wie für diese Aufgabe Lemma 5.3 verwendet werden soll. Dabei geht es darum den Fall (6.37), in dem wir uns befinden, in verschiedene Unterfälle aufzuteilen und separat für jeden dieser Unterfälle Abschätzungen $(N_0(\Lambda_r))_r$ herzuleiten.

Zur Anwendung von Lemma 5.3 wählen wir das $\lambda^\star$ aus (6.39), das λ_{12} aus (6.37), die Funktion f mit

$$\gamma = 1.62 - 0.55\lambda^\star \tag{6.45}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
b =& \lambda_{31} + \frac{\Lambda - \lambda_{31}}{3} - 0.01, \\
d =& \lambda_{31} + 2 \cdot \frac{\Lambda - \lambda_{31}}{3} - 0.01.
\end{aligned}
$$

Ist $\lambda^\star = \lambda_{11}$, dann wählen wir $C = 0$, was wegen der Bedingung 2, die f erfüllt, möglich ist. Ansonsten berechnen wir eine obere Abschätzung C mittels Lemma 3.9 und den Werten

$$
\begin{array}{llll}
k_1 = 0, & k_2 = 1, & k_3 = 0, & \\
s_{11} = \max\{0, \lambda^\star - \lambda_{12}\}, & s_{12} = \lambda^\star - \lambda_{11}, & s_{21} = s_{22} = 0, & \\
\Delta_1 = 0.02, & \Delta_2 = 0, & \Delta_t = 0.02, & x_1 = 5.
\end{array}
$$

Wir erläutern jetzt die weiter oben angekündigte Aufteilung in verschiedene Unterfälle. Für zwei nicht-negative ganze Zahlen B_1, D_1 und ein $\lambda > 0$ sei dazu $N_0(\lambda; B_1, D_1)$ die resultierende obere Abschätzung aus (5.33). Ist $D_1 = 0$ so ersetzen wir dabei im Lemma das d durch λ. Ist $B_1 = 0$ und $D_1 \neq 0$, so ersetzen wir das b durch d und ist schließlich $B_1 = D_1 = 0$ dann ersetzen wir b und d jeweils durch λ. Dies tun wir einerseits, damit gleich bei der Anwendung von Lemma 5.3 die Bedingung $b \leq d \leq \lambda$ immer erfüllt ist. Andererseits liefert dies in manchen Spezialkonstellationen bessere Abschätzungen. Alternativ hätte man das Lemma auch ein wenig komplizierter formulieren können.

Mit den Abkürzungen $\wedge$ für „und“, $\vee$ für „oder“ und $N_b = N_0(b; 0, 0)$ ist die folgende Aussage wahr:

$$
\begin{aligned}
&\Big(N(b) \in [0,4] \quad \wedge \quad \big(N(d) \in [0,4] \ \vee \ N(d) = 5 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; 0, 0)\big)\Big) \\
\vee &\Big(N(b) = 5 \quad \wedge \quad \big(N(d) = 5 \ \vee \ N(d) = 6 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; 5, 0)\big)\Big) \\
&\vdots \\
\vee &\Big(N(b) = N_b \quad \wedge \quad \big(N(d) = N_b \ \vee \ N(d) = N_b + 1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; N_b, 0)\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

Damit haben wir unsere Anfangssituation in

$$
(N_0(d; 0, 0) - 3) + (N_0(d; 5, 0) - 4) + \ldots + (N_0(d; N_b, 0) - N_b + 1)
$$

verschiedene Fälle aufgeteilt. Jeder Fall ist charakterisiert durch das Tupel $(B_1, B_2, D_1, D_2) \in \mathbb{N}_0^4$, für welches

$$
B_1 \leq N(b) \leq B_2 \quad \text{und} \quad D_1 \leq N(d) \leq D_2
$$

gilt (meist ist $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$). Für jedes Tupel berechnen wir obere Abschätzungen $(N_0(\Lambda_r))_r$ mittels

$$
N(\lambda) \leq N_0(\lambda) := \begin{cases} \min\{B_2, N_0(\lambda; 0, 0)\} & \text{falls } \lambda \leq b, \\ \min\{D_2, N_0(\lambda; B_1, 0)\} & \text{falls } b < \lambda \leq d, \\ N_0(\lambda; B_1, D_1) & \text{falls } d < \lambda. \end{cases}
\tag{6.47}
$$

Gilt dann für jeden Fall aus (6.46), dass $W < 1$, dann ist Theorem 2.1 für $\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}]$ bewiesen.

6.4 Beweis von Theorem 2.1

Fall 1: χ_1 und ρ_1 beide reell

Wir gehen so vor, wie es zum Schluss von §6.2 angesprochen wurde. Für die Herleitung der Abschätzungen vom Typ (6.29) benutzen wir dabei die Vorgehensweise aus §6.3.

Ist $\lambda_1 < 0.348$ dann folgt aus [22] und [23, Lemma 14.2] die Zulässigkeit von $L = 4.9$ im Theorem von Linnik. Also beginnen wir mit dem Fall

$$\lambda_1 \in [0.348, 0.60] =: [\lambda_{11}, \lambda_{12}].$$

Als λ'-Abschätzung bzw. λ_2-Abschätzung wählen wir den entsprechenden Wert aus [23, Table 4] bzw. [23, Table 7] (vergleiche Erklärungen in §3.1.4). Als λ_3-Abschätzung wählen wir das Maximum von letzterer λ_2-Abschätzung, dem Wert aus unserer Tabelle 10 und 0.857 (siehe [23, Lemma 10.3]). Außerdem benutzen wir, dass λ', λ_2 und λ_3 jeweils mindestens gleich λ_{11} sind. Dieses Vorgehen resultiert in $\lambda' \geq 1.832$, $\lambda_2 \geq 0.92$ und $\lambda_3 \geq 1.176$. Was noch verbleibt ist die Wahl eines $\delta > 0$. Je kleiner dies ist, desto kleiner auch das resultierende W, aber desto länger dauern die Computerrechnungen. Wir wählen $\delta = 0.06$ und erhalten für alle in §6.3 angesprochenen Fälle, dass $W < 0.973 < 1$, was zu Zeigen war.

Sei nun $\lambda_1 \in [0.60, 0.80]$. Mit identischem Vorgehen bekommen wir $\lambda' \geq 1.630$, $\lambda_2 \geq 0.745$ und $\lambda_3 \geq 0.952$. Diesmal wählen wir $\delta = 0.01$ und erhalten immer $W < 0.996 < 1$.

Schließlich gilt für $\lambda_1 \in [0.80, \infty)$, dass $\lambda' \geq 1.294$, $\lambda_2 \geq 0.80$ und $\lambda_3 \geq 0.857$. Wir wählen $\delta = 0.03$ und bekommen immer $W < 0.987 < 1$, womit Theorem 2.1 für den Fall χ_1 und ρ_1 beide reell bewiesen wäre. Wir weisen darauf hin, dass wenn wir kleinere Intervalle für λ_1 gewählt hätten, wir jeweils stärkere Abschätzungen hätten benutzen können. Dies hätte zu einem besseren Wert für die zulässige Linniksche Konstante L geführt. Das gilt auch für den nachfolgenden Fall 2.

Fall 2: χ_1 reell und ρ_1 komplex

Diesmal haben wir $\lambda_1 \geq 0.628$ gemäß Lemma 4.5. Es genügt also die Intervalle

$$\lambda_1 \in [0.628, 0.78] \quad \text{und} \quad \lambda_1 \in [0.78, \infty)$$

zu betrachten. Wir gehen genauso vor wie in Fall 1. Dabei verwenden wir anstelle von [23, Table 4] und [23, Table 7] die Tabellen 3 und 6 und wählen beide Male $\delta = 0.03$. Wir erhalten immer $W < 0.984$, womit Theorem 2.1 für diesen Fall folgt.

Fall 3: χ_1 komplex

Diesmal haben wir gemäß Lemma 4.5 die Abschätzung $\lambda_1 \geq 0.44$. Wir unterscheiden die Intervalle

$$\begin{array}{lllllll} \lambda_1 \in & [0.44, 0.58], & [0.58, 0.64], & [0.64, 0.66], & [0.66, 0.68], & [0.68, 0.70], & [0.70, 0.71], \\ & [0.71, 0.72], & [0.72, 0.74], & [0.74, 0.78], & [0.78, 0.82], & [0.82, \infty) & \end{array}$$

und wählen

$$\delta = \begin{cases} 0.06 & \text{falls } \lambda_{11} \in \{0.44, 0.58, 0.64\}, \\ 0.01 & \text{falls } \lambda_{11} \in \{0.66, 0.68, 0.70\}, \\ 0.02 & \text{falls } \lambda_{11} \in \{0.71, 0.72\}, \\ 0.03 & \text{falls } \lambda_{11} \in \{0.74, 0.78, 0.82\}. \end{cases}$$

Für die λ'- und λ_2-Abschätzungen verwenden wir Tabelle 2' und 7 und für die λ_3-Abschätzungen Tabelle 8 und 9. Angesichts der Abschätzungen aus Tabelle 9 unterscheiden wir dabei zusätzlich im Fall $\lambda_1 \in [0.68, 0.70]$ zwischen den beiden Fällen $\lambda_2 \leq 0.745$ und $\lambda_2 \geq 0.745$. Bei ersterem gilt $\lambda_2 \geq 0.704$ und $\lambda_3 \geq 1.054$, während wir bei letzterem $\lambda_2 \geq 0.745$ und $\lambda_3 \geq 0.893$ benutzen können. Analoges gilt für die Intervalle $[0.70, 0.71]$, $[0.71, 0.72]$, $[0.72, 0.74]$ und $[0.74, 0.78]$.

Für alle Fälle folgt $W < 0.998$. Damit ist der Beweis von Theorem 2.1 erbracht. $\square$

Bemerkungen

Wir haben ein paar grobe numerische Untersuchungen durchgeführt bezüglich der Frage, um wieviel sich ca. die Linniksche Konstante unter gewissen Voraussetzungen verbessern würde.

- Wenn man die benutzte Rechenzeit gegen unendlich laufen ließe, indem man ein kleineres $\delta > 0$ nimmt, sowie die Intervallweite für λ_1 und λ_2 verkleinert und entsprechend λ', λ_2 und λ_3 - Abschätzungen beweist, dann erhielte man vermutlich ca. $L = 4.96$.

- Hätte man für die Nullstellendichte für große λ eine Ungleichung mit doppelt so guter Konstante, nämlich $\frac{M^2}{2c_1c_2^2}$ anstelle von $\frac{M^2}{c_1c_2^2}$ in (5.19), dann erhielte man vermutlich ca. $L = 4.6$.

- Hätte man ähnlich für die Nullstellendichte für kleine λ eine Ungleichung (5.33) mit doppelt so guter Konstante, dann erhielte man vermutlich ca. $L = 4.93$.

- Hätte man für $\lambda_1 \in [0.68, 0.70]$ die Abschätzungen λ', λ_2, $\lambda_3 \geq 1.1$, dann erhielte man für dieses Intervall vermutlich ca. $L = 4.7$.

Damit führen selbst deutliche numerische Verbesserungen der benutzten Abschätzungen zu vergleichsweise überschaubaren Verbesserungen für die Linniksche Konstante L. Eine verbesserte Abschätzung der Nullstellendichte für große λ liefert dabei im Vergleich noch den größten Gewinn.

6.5 Beweis von Theorem 2.2

Betrachtet man die Herleitung von Theorem 2.1 so ist ersichtlich, dass für hinreichend großes q nicht nur die Existenz einer sondern gleich mehrerer Primzahlen $p \leq q^5$ nachgewiesen wurde. Dies soll im folgenden Lemma, welches Theorem 2.2 enthält, präzisiert werden.

Ähnliche Theoreme folgen auch aus den Behandlungen anderer Autoren zur Linnikschen Konstante (vergleiche beispielsweise [26, Theorem 18.6, Theorem 18.7, Korollar 18.8]). In der analytischen Zahlentheorie ist es schließlich oft der Fall, dass *eine* Primzahl alleine noch keine großen Auswirkungen verursacht, die man aufspüren könnte. Erst wenn viele zusammen kommen machen sie sich „bemerkbar“.

Lemma 6.2. ***a)*** *(Ausnahmenullstelle existiert nicht)*
Sei $\lambda > 0$ beliebig und nehme an, dass $\lambda_1 \geq \lambda$ oder dass ρ_1 nicht existiert. Dann gibt es zwei positive effektiv berechenbare Konstanten $q_0 = q_0(\lambda)$ und $C = C(\lambda)$, so dass für $q \geq q_0$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ es ein $t_0 = t_0(a, q) \in [q^{4.22}, q^5]$ gibt mit

$$\pi(t_0; q, a) \geq C \frac{t_0}{\varphi(q) \log t_0}. \tag{6.48}$$

b) *(Ausnahmenullstelle existiert)*
Es gibt ein $\lambda > 0$, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine positive Konstante $q_0 = q_0(\varepsilon)$ gibt, für die gilt: Ist $\lambda_1 \leq \lambda$ und $q \geq q_0$ dann gibt es für alle $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ ein $t_0 = t_0(a, q) \in [q^{4.99}, q^5]$ mit

$$\pi(t_0; q, a) \geq \frac{t_0^{1-\varepsilon}}{\varphi(q) \log t_0}. \tag{6.49}$$

Die Konstante λ ist effektiv berechenbar, q_0 jedoch nicht.

c) *(Quantitative Version des Linnikschen Theorems)*
Es gibt eine nicht effektiv berechenbare Konstante q_0, so dass für $q \geq q_0$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ die arithmetische Progression $a + q\mathbb{Z}$ mindestens

$$q^{3.21}$$

Primzahlen $p \leq q^5$ enthält.

d) *(Linniksche Konstante für den Fall, dass die Ausnahmenullstelle existiert)*
Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt eine effektiv berechenbare Konstante $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$, so dass im Falle $\lambda_1 \leq \lambda$

$$P(q) \ll_\varepsilon q^{3.5+\varepsilon} \tag{6.50}$$

gilt mit einer nicht effektiv berechenbaren impliziten Konstanten.

Bevor wir zum Beweis kommen, möchten wir ein paar Punkte ansprechen. Einerseits besagt Teil a), dass es für ein $t_0 \in [q^{4.22}, q^5]$ und bis auf einen beschränkten und von q unabhängigen Faktor C genau so viele Primzahlen in der Menge

$$[1, q^{t_0}] \;\cap\; a + q\mathbb{Z}$$

gibt, wie man auch erwartet (vergleiche (2.2) und [26, Theorem 6.6]). Die Tatsache, dass also nicht nur eine Primzahl nachgewiesen wurde, sondern bereits die korrekte Größenordnung, ist durchaus bemerkenswert. Weiterhin kann durch kleinere Modifikationen eine ähnliche Aussage formuliert werden für alle t in einem echten Intervall anstelle von $t = t_0$.

Falls eine hinreichend große Ausnahmenullstelle existiert, können wir nur die Existenz einer Anzahl von Primzahlen garantieren, deren Größenordnung um q^ε kleiner ist. Dies ist nicht überraschend. Gibt es nämlich eine Ausnahmenullstelle $\rho_1 = 1 - cq^{-\varepsilon}$ ($c > 0$ fest) und gilt für den entsprechenden reellen Charakter, dass $\chi_1(a) = 1$, so passt unsere bewiesene Größenordnung genau mit jener zusammen, welche beispielsweise aus [3, Satz 3.3.2] unter Vernachlässigung des Restterms folgen würde (vergleiche auch [10, Theorem 3.1]). In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass diese Ausnahmenullstellen nur recht selten vorkommen können (vergleiche [32, Korollar 11.9] und [3, S.114-115]). Für weitere Aussagen in diesem Zusammenhang verweisen wir auf [26, Theorem 18.7] und [10, Korollar 3.2].

Um in den Aussagen b) bis d) das q_0 durch eine effektiv berechenbare Konstante zu ersetzen, muss im verwendeten Theorem von Graham zum Deuring-Heilbronn Phänomen (siehe den folgenden Beweis) das Gleiche gemacht werden, was möglich ist. Außerdem muss dieses Theorem von Graham erweitert werden auf Nullstellen mit größerem maximal zulässigen Imaginärteil als lediglich $q^{(10^{-10})}$, was auch möglich ist. Man kann dann analoge Resultate beweisen, aber ggf. nur mit einer jeweils schlechteren Konstanten.

Schließlich sei erwähnt, dass die Konstante $L = 3.5 + \varepsilon$ aus d) deutlich schlechter ist als das $L = 2 + \varepsilon$, welches Heath-Brown mit Hilfe von Siebargumenten für den gleichen Fall erhält [22].

Beweis.
Beweis von a):
Geht man zurück in die Herleitung von Theorem 2.1, speziell den Ausgangspunkt (6.31) sowie Lemma 6.1, dann wird ersichtlich, dass wir für $q \geq q_0$ und $\lambda_1 \geq 0.348$

$$\Sigma \gg \frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)} \tag{6.51}$$

bewiesen haben. Für beliebiges $\lambda > 0$ und $\lambda \leq \lambda_1 < 0.348$ wurde die Ungleichung (6.51) in [23, Lemma 14.2] gezeigt, wobei in diesem Fall die implizite Konstante und das q_0 vom λ abhängen.

Gemäß (6.2) ist

$$h(t) = 0 \quad \text{für} \quad t \notin [L - 2K_2 - 2K, L] = [4.22, 5].$$

Mit partieller Summation folgt also für hinreichend großes q

$$\frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)} \ll \Sigma \ll \sum_{\substack{q^{L-5K} \leq p \leq q^L \\ p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ q)}} \frac{\log p}{p} \ll \frac{\mathscr{L}\pi(q^L; q, a)}{q^L} + \int_{q^{L-5K}}^{q^L} \pi(t; q, a) \frac{\log t}{t^2} \, dt. \tag{6.52}$$

Die impliziten Konstanten sind dabei effektiv berechenbar und unabhängig von a und q. Gäbe es nun ein $C > 0$ mit

$$\pi(t; q, a) \leq C \frac{t}{\varphi(q) \log t}$$

in $t \in [q^{4.22}, q^5]$, dann folgt aus (6.52) ein Widerspruch, falls C hinreichend klein ist. Dies beweist Teil a).

Vorbereitungen für die Beweise von b) und d):
Für den Fall der Existenz einer Ausnahmenullstelle gehen wir zurück in die Herleitung der Ungleichung (6.31). Ist λ_1 hinreichend klein so ist die rechte Seite von (6.31) wegen des ε bereits negativ und man kann nichts mehr folgern. Wir müssen das ε durch einen Restterm ersetzen, der für $q \to \infty$ hinreichend schnell gegen 0 geht. Dies könnten wir recht schnell abhandeln, indem wir uns auf [23, §5, §13] und „Standardargumente" berufen würden. Jedoch möchten wir die Argumente an dieser Stelle genauer ausführen.

Sei dazu $h(t) = h_{L,K}(t)$ die Funktion aus (3.51) und $H(z)$ die entsprechende Laplace-Transformierte aus (3.54). Dabei seien L und K zwei positive Konstanten mit $L > 2K$. Für $\mu \in \mathbb{R}$, $\Re\{s\} \geq 2 + \mathscr{L}^{-1}$, $f(t) = h(t)e^{\mu t}$ und die Laplace-Transformierte F von f gilt

$$f(\mathscr{L}^{-1} \log n) = \frac{\mathscr{L} n^s}{2\pi i} \int_{(2)} n^{-w} F((s - w)\mathscr{L}) \, dw. \tag{6.53}$$

Da f in $t = L - K$ nicht differenzierbar ist, wenden wir zur Begründung nicht direkt die Argumentation aus [23, S.281] an, sondern schreiben

$$f(t) = f(t) 1_{\{t \leq L-K\}} + f(t) 1_{\{t > L-K\}} =: f_1(t) + f_2(t)$$

und setzen ($f_i'(t)$ ist fast überall definiert)

$$F_{0i}(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-zt} f_i'(t) \, dt.$$

Jetzt übernehmen wir die Ausführungen aus [23, S.281] eins zu eins und erhalten

$$\frac{\mathscr{L} n^s}{2\pi i} \int_{(2)} n^{-w} F_{01}((s - w)\mathscr{L}) dw = \begin{cases} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) & \text{falls } L - 2K < \mathscr{L}^{-1} \log n \leq L - K, \\ f(L - K) & \text{falls } L - K < \mathscr{L}^{-1} \log n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\frac{\mathscr{L} n^s}{2\pi i} \int_{(2)} n^{-w} F_{02}((s - w)\mathscr{L}) dw = \begin{cases} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) - f(L - K) & \text{falls } L - K < \mathscr{L}^{-1} \log n \leq L, \\ -f(L - K) & \text{falls } L < \mathscr{L}^{-1} \log n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin folgt mit partieller Integration sofort $F(z) = F_{01}(z) + F_{02}(z)$ und insgesamt damit (6.53).

Wählt man $s = 2 + \mathscr{L}^{-1}$ und $\mu = \mathscr{L} + 1$ so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} h(\mathscr{L}^{-1} \log n) =& \frac{\mathscr{L}}{2\pi i} \int_{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} n^{-\mu \mathscr{L}^{-1}} n^{2+\mathscr{L}^{-1}} n^{-w} F((2 + \mathscr{L}^{-1} - w)\mathscr{L})\, dw \\ =& \frac{\mathscr{L}}{2\pi i} \int_{(2)} -\frac{\zeta'}{\zeta}(w) H((1-w)\mathscr{L})\, dw.\end{aligned}$$

Wir verschieben das Integral auf $\Re\{s\} = -1$ mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{L}}{2\pi i} \int_{(2)} -\frac{\zeta'}{\zeta}(w) H((1-w)\mathscr{L})\, dw = \lim_{m\to\infty} \Big(& H(0) - \sum_{\substack{\rho \\ |\Im\{\rho\}| < T_m}} H((1-\rho)\mathscr{L}) \\ & + O\Big(\Big| \int_{-1-iT_m}^{-1+iT_m} (\dots) \Big| + \Big| \int_{-1+iT_m}^{2+iT_m} (\dots) \Big| + \Big| \int_{-1-iT_m}^{2-iT_m} (\dots) \Big| \Big)\Big).\end{aligned}$$

Dabei geht die Summe über die nicht-trivialen Nullstellen ρ von $\zeta(s)$ und die $T_m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind so gewählt, dass $\lim_{m\to\infty} T_m = \infty$ und für alle Nullstellen ρ und alle $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|T_m - \Im\{\rho\}| \gg \frac{1}{\log T_m}$$

erfüllt ist mit einer festen impliziten Konstanten. Dass die T_m so gewählt werden können, folgt aus der Tatsache, dass $\zeta(s)$ höchstens $O(\log T)$ Nullstellen hat mit $T \leq |\Im\{\rho\}| < T+1$. Aus einer Standardabschätzung für $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ (siehe z.B. [3, Satz 2.6.1]) und (3.54) folgt, dass die O-Terme gleich

$$O(q^{-2(L-2K)} + q^L (\log^3 T_m) T_m^{-2})$$

sind. Insgesamt gilt also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} h(\mathscr{L}^{-1} \log n) = H(0) - \sum_{\rho} H((1-\rho)\mathscr{L}) + O(q^{-2(L-2K)}). \tag{6.54}$$

Benutzt man (6.54) anstelle der Gleichung in [23, S.324, letzte Zeile], dann erhält man anstelle von [23, Lemma 13.1] die Abschätzung

$$\Sigma \geq \frac{H(0)\mathscr{L}}{\varphi(q)} \left(1 - \sum_{\chi} \sum_{\rho} H(0)^{-1} |H((1-\rho)\mathscr{L})| + O(q^{\frac{-(L-2K-2)}{2}}) \right). \tag{6.55}$$

Sei $\rho_1 = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda_1$ die Ausnahmenullstelle mit $\lambda_1 \leq 0.44$. Dann folgt aus $1 - e^{-x} \leq x$ $(0 \leq x \leq 1)$, dass

$$H(0)^{-1} |H((1-\rho_1)\mathscr{L})| \leq 1 - (L-2K)\lambda_1 + O(\lambda_1^2) \leq 1 - c\lambda_1$$

für $\lambda_1 \leq \lambda$ und zwei hinreichend kleine effektiv berechenbare Konstanten $c, \lambda > 0$. Wir wenden uns nun dem Beitrag der restlichen Nullstellen $\rho \neq \rho_1$ zu. Für $q \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \{0\} \cup 2^{\mathbb{N}_0}$

setzen wir

$$M_{m,n} = M_{m,n}(q) = \Big\{\rho \mid L(\rho,\chi) = 0 \text{ für ein } \chi \pmod q,$$
$$1-(m+1)\mathscr{L}^{-1} \le \Re\{\rho\} \le 1 - m\mathscr{L}^{-1}, \quad \frac{1}{2}n\mathscr{L}^{-1} \le |\Im\{\rho\}| \le \max\Big\{\frac{1}{2}, n\Big\}\mathscr{L}^{-1}\Big\}.$$

Ist $\rho \in M_{m,n}$ dann gilt

$$|H((1-\rho)\mathscr{L})| \ll \frac{e^{-(L-2K)m}}{1+n^2}.$$

Um $\#M_{m,n}$ abzuschätzen, benutzen wir das folgende Resultat, welches auf Huxley [24] und Jutila [28] zurückgeht. Für $\delta > 0$ und $T \ge 1$ gilt

$$\sum_\chi N(\sigma, T, \chi) \ll_\delta \begin{cases} (qT)^{(\frac{12}{5}+\delta)(1-\sigma)} & \text{falls } \frac{1}{2} \le \sigma < \frac{4}{5}, \\ (qT)^{(2+\delta)(1-\sigma)} & \text{falls } \frac{4}{5} \le \sigma. \end{cases} \tag{6.56}$$

Für $\sigma < \frac{4}{5}$ könnte man teilweise eine bessere Konstante als $\frac{12}{5}$ benutzen (siehe [26, Grand Density Theorem 10.4] und [21]). Darauf können wir verzichten. Da die Nullstellen symmetrisch um $\sigma = \frac{1}{2}$ verteilt sind, folgt

$$\#M_{m,n} \ll e^{3m}(1+n^{\frac{3}{2}}).$$

Für $L - 2K - 3 > 0$ und $\delta > 0$ schließt man

$$\sum_\chi \sum_{\substack{\rho \\ \Re\{\rho\} \le \frac{4}{5}}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \ll q^{\frac{-(L-2K-3)}{5}} \tag{6.57}$$

und

$$\sum_\chi \sum_{\substack{\rho \\ |\Im\{\rho\}| \ge q^\delta}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \ll q^{-\frac{\delta}{2}}. \tag{6.58}$$

Ein Satz von Siegel [3, Satz 3.2.2] besagt, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\lambda_1 \gg_\varepsilon q^{-\varepsilon},$$

wobei die implizite Konstante für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nicht effektiv berechenbar ist, ansonsten schon. Also liefern die Summen in (6.57) und (6.58) für $q \ge q_0$ einen Beitrag von jeweils $\le c\lambda_1/4$. Dabei ist q_0 nicht effektiv berechenbar.

Für die restlichen Nullstellen benutzen wir Prinzip 2 aus §2.2 in der Form des folgenden Theorems von Graham [15, Theorem 10.1]: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine nicht effektiv berechenbare Konstante q_0, so dass im Falle $q \ge q_0$ und $\lambda_1 \le 0.05$ die Funktion

$$\prod_{\chi \pmod q} L(s,\chi)$$

in der Region

$$\sigma \ge 1 - \Big(\frac{2}{3} - \varepsilon\Big)\frac{\log(\frac{2}{3}\lambda_1^{-1})}{\mathscr{L}}, \qquad |t| \le q^{(10^{-10})}$$

mit Ausnahme von ρ_1 keine weiteren Nullstellen hat. Wir benutzen auch, dass für $\sigma \ge \frac{4}{5}$

$$\#\{\rho \in M_{m,n} \mid \Re\{\rho\} \ge \sigma\} \ll_\delta e^{(2+\delta)m}(1+n^{\frac{3}{2}}).$$

Außerdem kennzeichnen wir mit $\sum_n'$ die Einschränkung der Summation auf jene n mit $n \in$

$\{0\} \cup 2^{\mathbb{N}_0}$ und setzen $L - 2K - 2 > 0$ voraus. Mit der Abkürzung $\delta_0 = 10^{-10}$ und hinreichend kleinen $\varepsilon, \delta > 0$ folgt dann

$$\sum_{\chi} \sum_{\substack{\rho \neq \rho_1 \\ \Re\{\rho\} \geq \frac{4}{5} \\ |\Im\{\rho\}| \leq q^{\delta_0}}} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \ll_\delta {\sum_n}' \sum_{m \geq (\frac{2}{3} - \varepsilon) \log(\frac{2}{3}\lambda_1^{-1})} \frac{e^{-(L-2K)m}}{1+n^2} e^{(2+\delta)m}(1 + n^{\frac{3}{2}}) \tag{6.59}$$

$$\ll \lambda_1^{\frac{2}{3}(L-2K-2-2\delta)}.$$

Beweis von d):
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Ist $L = 3.5 + 6\varepsilon$ und $K = \varepsilon$ dann folgt mit $\delta = \varepsilon$, dass der Beitrag der Nullstellen aus (6.59) gleich $O(\lambda_1^{1+\varepsilon})$ ist und damit kleiner als $c\lambda_1/4$, falls $\lambda_1 \leq \lambda(\varepsilon)$ für eine effektiv berechenbare positive Konstante $\lambda(\varepsilon)$. Aus (6.55) folgt die Aussage d).

Beweis von b):
Für $L = 5$ und $K = 0.005$ erhält man analog

$$\Sigma \gg \frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)}\lambda_1,$$

falls $q \geq q_0$ und $\lambda_1 \leq \lambda$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach dem Satz von Siegel gilt

$$\lambda_1 \geq q^{-\varepsilon}$$

für $q \geq q_1$ und ein nicht effektiv berechenbares q_1. Also gilt für $q \geq \max\{q_0, q_1\}$

$$\Sigma \gg \frac{\mathscr{L} q^{-\varepsilon}}{\varphi(q)}$$

mit einer effektiv berechenbaren impliziten Konstanten. Mit analoger Schlussweise wie bei a) folgt dann die Gültigkeit von b).

Beweis von c):
Unmittelbar aus a) und b). $\square$

Kapitel 7

Anmerkungen bezüglich geringfügiger Verbesserungspotentiale

In §7.1-§7.4 diskutieren wir kurz ein paar Variationen in den Argumenten dieser Arbeit und in §7.5-§7.9 jene der neun Verbesserungspotentiale aus [23, S.332-337] (kurz: VB1 - VB9), die wir letztendlich nicht verwendet haben. Das liegt daran, dass die resultierenden Verbesserungen[1] für Theorem 2.1 zu gering sind (darunter verstehen wir im Allgemeinen Verbesserungen von ≤ 0.005 für die zulässige Linniksche Konstante L). Bei einigen Potentialen ist es dabei so, dass man zwar hilfreiche Verbesserungen bekommt, dies aber nur für einen Teil der später auftauchenden Fälle (z.B. nur für ca. $\lambda_1 \leq 0.60$ bei VB8). Bei anderen mag die Verbesserung leicht oberhalb der „Grenze“ 0.005 liegen, aber dies nur auf Kosten von deutlich komplizierteren Rechnungen und längerer Rechenzeit.

Betonen möchten wir an dieser Stelle den allgemeinen Hinweis in der Mitte von §7.2 bzgl. eines alternativen Nullstellendetektors und den speziellen Hinweis am Ende von §7.3 bzgl. der gröber werdenden Abschätzung. Diesen beiden Punkten sind wir nicht näher nachgegangen.

7.1 Andere trigonometrische Ungleichungen

Beim Beweis der λ'-Abschätzungen kann anstelle von (4.2) die verwandte trigonometrische Ungleichung ($l, k \geq 0$ seien zwei Parameter)

$$0 \leq \chi_0(n)\left(l + \Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma'}}\right\}\right)^2 \left(k + \Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}\right)^2 = \ldots$$

benutzt werden. Diese, sowie einige andere Ungleichungen, die wir getestet haben, lieferten im Allgemeinen keine oder nur minimal bessere Werte.

Für den Beweis von Lemma 4.3 starteten wir mit der Ungleichung [23, S.305, letzte Zeile], also

$$0 \leq \chi_0(n)\left(1 + \Re\left\{\frac{\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right\}\right)\left(k + \Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}\right)^2.$$

[1] Damit meinen wir stillschweigend die aus *unserem* Vorgehen resultierenden Verbesserungen. Es mag andere Vorgehensweisen geben, die zu größeren Verbesserungen führen.

Benutzte man

$$0 \le \chi_0(n)\left(1+\Re\left\{\frac{\chi_j(n)}{n^{i\gamma_j}}\right\}\right)\left(k+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}\right)^2\left(1+\Re\left\{\frac{\chi_1(n)}{n^{i\gamma_1}}\right\}\right)$$

dann hätte man am Ende für die Fälle 5, 6 und 8 bessere Abschätzungen für λ_j im Bereich $\lambda_1 \le 0.60$. Man muss dabei beachten, dass durch die zusätzliche Klammer in der obigen Ungleichung die Anzahl der zu analysierenden Terme $K(s,\chi)$ stark zunimmt.

7.2 Variationen für den Beweis der Nullstellendichte für große λ

In der Herleitung von (3.32) gibt es einige „natürliche“ Ansätze zur Variation. Einerseits kann man statt der Cauchy Schwarz Ungleichung die allgemeinere Hölder Ungleichung verwenden (dies gilt auch für den Beweis von Lemma 5.3). Dann braucht man Abschätzungen von

$$\sum_{n\le N}\Big|\sum_{d|n}\psi_d^{U,V}\Big|^p \tag{7.1}$$

und

$$\sum_{n\le N}\Big|\sum_{d|n}\theta_d\Big|^q \tag{7.2}$$

für $p,q \ne 2$. Für $p=q=2$ konnten wir die präzise Abschätzung (5.12) von Graham benutzen, aber für $p,q\ne 2$ scheinen im Allgemeinen keine analogen Resultate zu existieren, noch wären solche leicht herzuleiten. Für $q \in 2\mathbb{N}$ existieren zwar Abschätzungen von (7.2) gemäß einer Arbeit von Goldston und Yildirim [13, Theorem 1.1]. Ist $q > 2$ so fehlen uns jedoch dann entsprechende Abschätzungen für (7.1), um ein brauchbares Resultat herzuleiten (beachte in diesem Zusammenhang [13, Theorem 8.1]).

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass Goldston und Yildirim im erwähnten Artikel eine Menge von verwandten Summen analysiert haben, die (7.1) und (7.2) enthält. Diese Abhandlungen kulminierten schließlich in den Beweis des beachtlichen Resultats, dass es unendlich viele benachbarte Primzahlen (p_n, p_{n+1}) gibt, deren Abstand zueinander kleiner ist als ein beliebig vorgegebener Bruchteil des „Durchschnittsabstands“ (siehe [14]). Diese Analysen könnten vielleicht Ansätze oder Ergebnisse liefern für die Entwicklung eines besseren Nullstellendetektors als jenem aus (3.28), den wir verwendet haben.

Weiterhin kann man anstelle des Ansatzes

$$M(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{v,w\\ [v,w]=n}}\psi_v\theta_w\Big)\chi(n)n^{-s}$$

allgemeiner

$$M(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{v,w,z\\ [v,w,z]=n}}\psi_v\theta_w\xi_z\Big)\chi(n)n^{-s}$$

wählen. Setzt man dann beispielsweise $\xi_z=\theta_z$ dann folgt vermöge der eben erwähnten Abschätzung von (7.2) für $q=4$, dass die einzelnen Terme im resultierenden Nullstellendetektor tatsächlich im Durchschnitt kleiner werden. Jedoch muss man dann das x größer wählen, um zu garantieren, dass der Beitrag für große n ($n > q^x$) gleich $o(1)$ ist für $q\to\infty$. Insgesamt bekamen wir keine Verbesserung.

Der Nullstellendetektor (3.28) wird hoch $k=2$ genommen bevor mit dem Gewicht w_χ

multipliziert und über die χ summiert wird. Man könnte hoch $k = 1$ oder $k \geq 3$ nehmen, doch auch dies liefert keine besseren Resultate.

7.3 Weitere Variationen in den Beweisen

Für den Beweis der λ'-Abschätzungen in Fall 1 (Tabelle 2) hätten wir an manchen Stellen zusätzlich die Nullstelle ρ' benutzen können. Dies hätte minimale Verbesserugen geliefert, aber die Rechnungen zusätzlich strapaziert.

Die Werte aus Tabelle 11 kann man durch folgende Verfeinerungen leicht verbessern:

- Für alle Fälle: Eine Variation der Konstanten 3 und 9 in der Ungleichung (4.37) bringt einen Gewinn von ca. $0.000 - 0.001$ für die neuen λ_1-Abschätzungen.
- Für den Fall $\operatorname{ord}\chi_1 \geq 6$: Hätte man bessere λ'- und λ_2-Abschätzungen im Bereich $\lambda_1 \leq 0.46$ bewiesen (indem man z.B. für λ_2 acht verschiedene optimale Tabellen aufgestellt hätte), so hätte man eine Verbesserung von mindestens ca. 0.01.
- Für die Fälle $\operatorname{ord}\chi_1 \leq 5$: Einerseits hätte man spezielle, bessere λ'- und λ_2-Abschätzungen beweisen können (wegen $\phi(\chi_1) = \frac{1}{4}$). Andererseits hätte man die bewiesenen Abschätzungen, z.B. $\lambda_1 > 0.493$ bei $\operatorname{ord}\chi_1 = 5$, dazu benutzen können das Supremum nochmal abzuschätzen, diesmal unter der Voraussetzung $\lambda_1 \geq \lambda_{1,alt} = 0.493$. Dies kann einen kleineren Wert für die Abschätzung des Supremums liefern. Beide erwähnten Verfeinerungen liefern Verbesserungen von zusammen wenigen Hundertsteln.

Man beachte, dass in unserer Arbeit keine der eben genannten Verfeinerungen einen Gewinn für die letztendlich zulässige Linniksche Konstante L liefern würde.

In VB9 wird darauf hingewiesen, dass es wünschenswert wäre eine gewichtete Version von [23, Lemma 12.1] zu haben. In diese Richtung liefert die Argumentation im Beweis dieses Lemmas die Ungleichung

$$\sum_{j \leq N} F(\lambda^{(j)} - \lambda_{11}) \leq \sqrt{F(-\lambda_{11})\left(NF(-\lambda_{11}) + (N^2 - N)\frac{f(0)}{6}\right)} + N\frac{f(0)}{6} + \varepsilon.$$

Nun kann man für N die obere Abschätzung, welche aus dem Lemma folgt, nehmen und damit die rechte Seite der letzten Ungleichung explizit (in Abhängigkeit von λ_{11} und f) abschätzen. Jedoch bekamen wir aus der dadurch gewonnenen gewichteten Version keine Verbesserung für die Linniksche Konstante L im Vergleich zur direkten Anwendung des Lemmas.

In Lemma 5.3 kann man die Lage von ρ_2 in den Beweis mit einbauen und entsprechende Erweiterungen in der Formulierung von Lemma 6.1 vornehmen (Unterscheidung, ob χ_2 reell oder komplex). Wäre $\lambda_2 \leq b$, so erhielte man bessere Abschätzungen für $N_0(\Lambda_r)$ und könnte außerdem bessere Abschätzungen für λ_3 beweisen (vergleiche Tabelle 9). Wäre $\lambda_2 \geq b$, dann lieferte dies bessere Abschätzungen für den Term aus Lemma 6.1. Ähnliches gilt dafür, ob χ_2 reell oder komplex ist.

Man könnte die Methode aus §6.3 in Verbindung mit Lemma 5.3 sofort verallgemeinern auf $M > 2$ Stützpunkte $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_M$ anstelle von zwei Punkten $b \leq d$. Es ist zu beachten, dass die Rechenzeit dann sehr stark ansteigt.

Für den Beweis von Lemma 6.1 haben wir für $\lambda^{(k)} > \Lambda$ die Abschätzung

$$e^{-(L-2K-2K_2)\lambda^{(k)}} B(\lambda^{(k)}) \leq \frac{w(\lambda^{(k)})e^{-(L-2K-2K_2)\Lambda} B(\Lambda)}{w(\Lambda)}$$

verwendet. Ist $\lambda^{(k)}$ deutlich größer als Λ, so ist diese Abschätzung recht grob. Dies lässt etwas Raum für Verbesserungen.

7.4 Optimierung der Parameter und mehr Rechenzeit

An verschiedenen Stellen dieser Arbeit werden Computerberechnungen benutzt und dafür Parameter gewählt. Sehr leichte Verbesserungen ließen sich durch eine noch bessere Wahl der Parameter erzielen. Einerseits hätte man direkt (teilweise verschwindend geringfügig) bessere Werte auf Kosten von längerer Rechenzeit bei

- kleinerer Wahl von Δ_1, Δ_2, Δ_t und größerer Wahl von x_1 bei der Verwendung von Lemma 3.9,
- kleinerer Wahl von δ beim Beweis von Theorem 2.1,
- größerer Wahl des M bei Verwendung von Lemma 5.1 mit den Koeffizienten aus §5.1.1 (wurde benutzt in Lemma 6.1),
- Reduzierung der Intervalllänge für das λ_1 im Beweis von Theorem 2.1, sowie entsprechende Erweiterung der Tabellen.

Eine weitere Verbesserung könnte man durch eine Erweiterung von Tabelle 9 erzielen. Betrachte den Fall $\lambda_1 \in [0.68, 0.70]$ im Beweis von Theorem 2.1 für χ_1 komplex. Vermöge Tabelle 9 wird dieser aufgeteilt in die Fälle $\lambda_2 \in [0.704, 0.745]$ und $\lambda_2 \in [0.745, \infty)$. Dies kann verfeinert werden, z.B. auf die Fälle $\lambda_2 \in [0.704, 0.71]$, $[0.71, 0.72]$, $[0.72, 0.73]$ etc.

Weiterhin könnte man die Wahl der Parameter nicht so „gleichmäßig“ gestalten (vergleiche z.B. (4.15)), sondern für jeden Einzelfall separat optimale Parameter angeben. Bei der Aufstellung der Tabellen hieße das für jede Zeile separat ein γ und ggf. k anzugeben. Für den Beweis von Theorem 2.1 hieße das für jede Berechnung eines W separat Parameter K, K_1, K_2, β_1, β_2, c_1, c_2, θ, γ anzugeben.

Bei der Verwendung von §6.1 kann man ein größeres M wählen, als das von uns benutzte $M = 2$. Die dazu notwendigen Rechnungen (Wahl der Parameter K_i und β_i, Nachweis der Nichtnegativität und Monotonie) erhöhen sich stark.

Die Wahl der Funktion $w_0(t)$ in Lemma 6.1 kann etwas optimiert werden. Konkret resultiert die benutzte Funktion $w_0(t)$ (siehe (6.20)) aus der Minimierungsaufgabe (vergleiche [23, S.336])

$$\min_{w_0} \left\{ \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_0, u_M - u_0\} \right) \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2\theta t} \right) \right\}.$$

Der Ausdruck wird dabei minimiert, wenn die beiden Integranden identisch sind (vergleiche Cauchy Schwarz Ungleichung für Integrale). Wir könnten stattdessen

$$\min_{w_0} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\} \, dt \right) \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2\theta t} \right) \right\}$$

lösen. Ein dazu optimales w_0 lässt sich recht leicht finden, indem man die Summe über die Integrale als ein Integral schreibt und dann das Aussehen von $w_0(t)$ für jedes Intervall $[u_{i-1}, u_i]$ separat bestimmt. Für $M = 2$ hätte man

$$w_0(t) = e^{\frac{-\theta t}{2}} \left(\min\{t - u_0, u_1 - u_0\} + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \max\{0, \min\{t - u_1, u_2 - u_1\}\} \right)^{0.25},$$

was zu minimal besseren Werten führt.

In dem Zusammenhang sei erwähnt, dass die α_i aus (5.16) optimal sind, wenn $w_0(t) \equiv 1$. Da ein anderes $w_0(t)$ verwendet wird, kann man diese α_i noch geringfügig optimieren.

7.5 Andere Gewichtsfunktionen f - VB1

Für diesen Abschnitt verweisen wir auf die Bezeichnungen und Kommentare in §3.1.3. Den Funktionen f, die wir in Lemma 3.1 und 3.4 einsetzen, fällt eine große Bedeutung zu. Die Konstanten, die wir für unsere Abschätzungen bekommen, hängen Eins zu Eins mit der benutzten Funktion f zusammen. Insofern kann es sinnvoll sein auch nach Funktionen f zu schauen, die Bedingung 1 und 2 erfüllen, aber nicht aus dem speziellen Ansatz in [23, §7] kommen.

In VB1 schlägt Heath-Brown vor beim Aufstellen der „Variationsbedingung“ etwas allgemeiner vorzugehen, als es in [23, §7] gemacht wurde. Dies führt zu einer Differentialgleichung 4. Ordnung, die die optimale Funktion g_1 erfüllen muss. Dieser Ansatz erfordert recht lange Rechnungen und verschiedene Fallbesprechungen. Letztendlich bekommt man im Wesentlichen folgende Funktionen für g ($c_1, c_2, c_3, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten):

$$g(t) = c_1 co_1(x_1 t) + c_2 co_2(x_2 t) - c_3,$$

$$g(t) = c_1 \cosh(x_1 t) \cos(x_2 t) + c_2 \sinh(x_1 t) \sin(x_2 t) - c_3,$$

wobei $co_i(t) = \cos(t)$ oder $co_i(t) = \cosh(t)$. Was die optimale Wahl der Konstanten angeht, so ergeben sich verschiedene Bedingungen, aus denen in den meisten Fällen optimale Werte für die Konstanten bestimmt werden können. Alternativ kann man aber auch für eine obige Funktion g per Hand (bzw. Computer) durch „numerisches Experimentieren“ annähernd optimale Werte für die Konstanten finden. Letzteres ist einfacher.

Mit diesen neuen Funktionen g erhalten wir keine nennenswerte Verbesserungen. Beispielsweise können wir in [23, Table 9-10] nur ein paar der Abschätzungen $\lambda_2 \geq C$ verbessern und dies nur um $0.001 - 0.002$ für die Konstante C. In [23, Table 2-5] bekommen wir für kleine λ_1 etwas größere Verbesserungen im „Hundertstel-Bereich“. Doch auch diese lohnen sich nicht, einerseits weil wir für den in [23, §8] diskutierten Fall keine Verbesserungen nötig haben, andererseits weil diese Verbesserungen nur einen minimalen Effekt auf die zulässige Endkonstante L haben.

Letztendlich sollte man beachten, dass die oben erwähnten neuen Funktionen g qualitativ „genauso aussehen“ wie die alten: Zum Beispiel kann man für die Verbesserung des ersten Eintrags in [23, Table 9] um 0.001 auf $\lambda_j \geq 1.284$ die Funktion

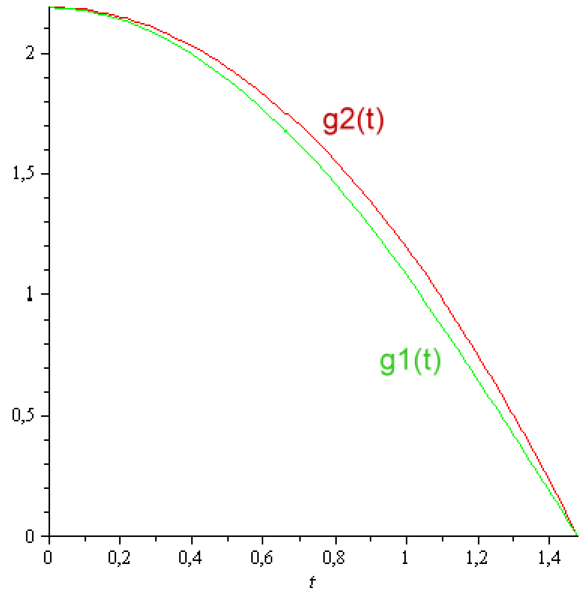
$$g_1(t) = c_1 \cosh(x_1 t) + c_2 \cos(x_2 t) - c_3$$

mit den Konstanten

$$c_1 = 0.3, \quad x_1 = 0.5, \quad c_2 = 2.5, \quad x_2 = 1.0, \quad c_3 = c_1 \cosh(x_1 \gamma) + c_2 \cos(x_2 \gamma), \quad \gamma = 1.48$$

benutzen. Andererseits liefert $g_2(t) = \gamma^2 - t^2$ mit dem gleichen γ den Wert $\lambda_j \geq 1.281$ (und durch $\gamma = 1.44$ bekäme man $\lambda_j \geq 1.282$). Schließlich sehen die Graphen der beiden Funktionen sehr ähnlich aus:

Neues und altes g



Auch einige andere Ansätze lieferten keinen Erfolg. Beispielsweise haben wir mit Funktionen f gearbeitet, die nicht vollständig die Bedingung 2 erfüllen. Für gewisse f, die teilweise negativ sind, bekommt man einerseits bessere Werte. Andererseits verursachen sie in den entsprechenden Herleitungen einen Fehler, der den Gewinn wieder (mehr als) aufzehrt.

Falls wir in der Ungleichung (4.4) β_1 anstelle von $\beta^\star$ wählen und voraussetzen, dass

$$\min(\lambda_2, \lambda') - \lambda_1 \geq c > 0,$$

dann können wir Funktionen f nehmen, dessen Laplace-Transformierte nur

$$\Re\{F(z)\} \geq 0 \text{ für } \Re\{z\} \geq c$$

erfüllt (Beispiel: $f(t) = \gamma^4 - t^4$). Diese Funktionen f liefern dann im Allgemeinen bessere Werte. Jedoch wählten wir dort - sowie auch an den anderen entsprechenden Stellen - vermöge VB2 immer $\beta^\star = \max\{\beta', \beta_2\}$.

7.6 Verwendung eines Brun-Titchmarsh Theorems zur Schärfung der Anfangsungleichung - VB3

Heath-Brown beschreibt in [23, S.332-333] eine simple Vorgehensweise für dieses sehr interessante Potential, welche minimale Verbesserungen für alle Abschätzungen liefert, die mit der „zweiten Methode“ (vergleiche 3.1.1) bewiesen werden. Die Frage ist, ob man durch eine verfeinerte Vorgehensweise hilfreiche Verbesserungen bekäme? Als Antwort auf diese Frage skizzieren wir in diesem Abschnitt ein „worst case“-Szenario, welches sich nicht einfach ausschließen lässt und bei welchem dieses Potential keine ausreichenden Verbesserungen liefert - zumindest solange man keine stark verbesserten Brun-Titchmarsh Ungleichungen zur Verfügung hat, was aber im Moment nicht zu erwarten ist. Da wir dieses Potential ja schlussendlich nicht benutzen, werden wir die Argumentation nur skizzieren.

Wir setzen voraus, dass $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$. Dies Voraussetzung ist nicht zwingend notwendig, vereinfacht jedoch die Rechnungen. Außerdem soll $\operatorname{ord}\chi_1$, $\operatorname{ord}\chi_2 > \mathscr{L}$, was durchaus notwendig ist. Wären die Ordnungen aber kleiner, dann könnte man an anderen Stellen bessere Resultate erzielen. Aufgrund der Voraussetzung an die Ordnungen sind $\chi_1(n)$ und $\chi_2(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $((n,q)=1)$ „einigermaßen gleichverteilt“ auf dem Einheitskreis[2].

Wir zeigen repräsentativ anhand der folgenden Ungleichung, dass dieses Potential zu geringe Verbesserungen liefert. Wir verweisen an dieser Stelle auf die Kommentare und Notationen aus §3.1.2. Es gilt

$$0 \le \chi_0(n)(1+\Re\{\chi_1(n)\})(1+\Re\{\chi_2(n)\}) \tag{7.3}$$

$$= \chi_0(n) + \Re\{\chi_1(n)\} + \Re\{\chi_2(n)\} + \frac{1}{2}\Re\{\chi_1\chi_2(n)\} + \frac{1}{2}\Re\{\chi_1\overline{\chi_2}(n)\}. \tag{7.4}$$

Der nächste Schritt wäre mit $\Lambda(n)n^{-\beta_1}f(\mathscr{L}^{-1}\log n)$ zu multiplizieren und über n zu summieren. Nun kann man hier noch genauer arbeiten, denn: Für unbekanntes n ist (7.3) zwar optimal, da es durchaus sein kann, dass die rechte Seite beliebig nah bei Null ist. Wenn man jedoch über alle $n \in \mathbb{N}$ aufsummiert, so kann man benutzen, dass $\chi_j(n)$ ($j \in \{1,2\}$) einigermaßen gleichverteilt ist auf dem Einheitskreis, also ist auch für verschiedene n $((n,q)=1)$ der Wert

$$r(n) = \chi_0(n)(1+\Re\{\chi_1(n)\})(1+\Re\{\chi_2(n)\})$$

einigermaßen kontinuierlich verteilt auf $[0,4]$ - jedoch verstärkt bei 0 und 4. Das heißt, dass wir für einen großen Anteil der n auf der linken Seite von (7.3) einen positiven Wert c nehmen können anstelle von 0. Wir benutzen also statt (7.3) die Gleichheit (7.4) und bekommen

$$\begin{aligned} S =& \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\beta_1}f(\mathscr{L}^{-1}\log n)r(n) \\ \le& K(\beta_1,\chi_0) + K(\beta_1,\chi_1) + K(\beta_1,\chi_2) + \frac{1}{2}K(\beta_1,\chi_1\chi_2) + \frac{1}{2}K(\beta_1,\chi_1\overline{\chi_2}). \end{aligned}$$

Wir schätzen jeden der fünf Terme auf der rechten Seite der letzten Ungleichung mit Hilfe der Lemmata 3.1 und 3.4 auf die übliche Art und Weise ab und bekommen

$$\mathscr{L}^{-1}S \le F(-\lambda_1) - F(0) - F(\lambda_2-\lambda_1) + \frac{f(0)}{2} + \varepsilon. \tag{7.5}$$

Benutze zuerst die triviale Abschätzung $S \ge 0$. Setzen wir dann z.B. $\lambda_1 \le 0.54$ voraus, so ist $\gamma = 1.07$ recht optimal und wir bekommen

$$\lambda_1 \le 0.54 \Rightarrow \lambda_2 \ge 0.656.$$

Wir möchten sehen welche Verbesserung wir von 0.656 ungefähr erhalten würden, wenn wir S mit dem Verfahren aus VB3 nach unten abschätzten. Vorneweg weisen wir darauf hin, dass man analog zum Beweis von Lemma 3.1 hat, dass für $0 \le \alpha_1 < \alpha_2$

$$\sum_{q^{\alpha_1} < n \le q^{\alpha_2}} \chi_0(n)\Lambda(n)n^{-\beta_1}f(\mathscr{L}^{-1}\log n) \le \mathscr{L}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t)e^{\lambda_1 t}\,dt + \varepsilon\mathscr{L}. \tag{7.6}$$

---

[2]Beweisskizze: Definiere zuerst, was bewiesen werden soll, d.h. konkretisiere den Begriff „gleichverteilt“. Sei $i \in \{1,2\}$. Wegen

$$\operatorname{ord}\chi_i \le \operatorname{kgV}_{\{n \pmod q,(n,q)=1\}}(\operatorname{ord}_{\mathbb{C}^\star}\chi_i(n))$$

gibt es zu jedem $M \in \mathbb{N}$ für $q \ge q_0(M)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $N \ge M$ mit $\chi_i(n_0)$ ist primitive N-te Einheitswurzel. Benutze dann, dass $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$ endliches Produkt endlicher zyklischer Gruppen ist.

Mit vernachlässigbarem Restterm lassen wir die Summation in S nur über die Primzahlen p laufen. Wir wissen, dass der Wert von $r(n)$ für die $\varphi(q)$ verschiedenen n ($(n,q) = 1, n \leq q$) recht kontinuierlich verteilt ist in $[0,4]$. Die zentrale Problematik bei der Abschätzung von S liegt nun in der Frage, ob diejenigen Restklassen $n \pmod q$, für die $r(n)$ groß ist (z.B. $\geq \frac{1}{2}$), nur verhältnismäßig wenig Primzahlen enthalten. Dann wäre $\Lambda(n)$ dort verstärkt gleich 0 und würde die großen $r(n)$ wieder zunichte machen.

Man mag sich zwar jetzt vielleicht daran erinnern, dass die Primzahlen doch gleichverteilt sind in den primen Restklassen. Dies gilt aber nur wenn n sehr groß gegenüber q ist, z.B. $n \gg e^q$. Für $n \leq q^{x_0}$ jedoch (nur dann ist $f(\mathscr{L}^{-1}\log n) \neq 0$) ist dies nicht bekannt. Schließlich geht es in dieser Arbeit ja gerade darum, dass für gewisse Restklassen $a \pmod q$ nicht einmal garantiert werden kann, dass diese *eine* Primzahl $p \leq q^4$, sagen wir, enthalten.

Wir betrachten in S zuerst den Beitrag der n mit $1 \leq n \leq q$, ($(n,q) = 1$). Für passende q ist

$$\varphi(q) \geq \frac{1}{100}q \quad \text{und} \quad \sum_{\substack{n \leq q \\ \Lambda(n) \neq 0}} 1 = o(q). \tag{7.7}$$

Weiterhin kann man für solch kleine n nix über die Verteilung der Primzahlen in den Restklassen $\pmod q$ sagen - die Restklassen haben ja nur ein Element im Bereich $[1,q]$. Wegen (7.7) und der kontinuierlichen Verteilung von $r(n)$ in $[0,4]$ kann man also nicht ausschließen, dass für jegliche n, für die $\Lambda(n) \neq 0$ gilt, wir $r(n) < \varepsilon$ haben. Der Beitrag dieser betrachteten n zur Summe S wäre vermöge (7.6)

$$\leq \varepsilon\mathscr{L}\int_0^1 f(t)e^{\lambda_1 t}\,dt \ll \varepsilon\mathscr{L},$$

bei Betrachtung von (7.5) also vernachlässigbar. Der Beitrag der $n \in (q, q^{1+\varepsilon}]$ ist auch vernachlässigbar nach (7.6).

Sei jetzt $n \in (q^{1+\varepsilon}, q^{x_0}]$. Dann kann man das Problem der Gleichverteilung der Primzahlen in den Restklassen teilweise lösen mit Hilfe einer Brun-Titchmarsh Ungleichung[3]:

Theorem 7.1 (Motohashi, 1974, [33]). *Seien $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a,q) = 1$ und a liege nicht in einer gewissen Ausnahmemenge mit $O(q^{1-0.2\varepsilon})$ Restklassen $\pmod q$. Dann gilt für $x \geq q^{1+\varepsilon}$*

$$\pi(x;q,a) \leq \frac{2(1+2\varepsilon)x}{\varphi(q)\log(xq^{-\frac{1}{2}})} =: C\frac{x}{\varphi(q)\log x}.$$

Dabei ist $C = C(t) = 2(1+2\varepsilon)\frac{t}{t-\frac{1}{2}}$, wenn man $x = q^t$ setzt.

Wir nehmen im Folgenden an, dass wir letzteres Theorem für alle a ohne Ausnahmen verwenden dürfen (was auch gehen würde). Um den Beitrag der betrachteten n möglichst genau abzuschätzen, teilen wir die Summation auf in endlich viele Teile $n \in (q^{\alpha_l}, q^{\alpha_{l+1}}]$, wobei $1+\varepsilon = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_M = x_0$. Also bekommen wir M Teilsummen, die wir jeweils mit S_l ($l \in \{1, \ldots, M\}$) bezeichnen. Halte für die nachfolgenden Überlegungen ein S_l fest.

Wir können nicht ausschließen, dass die „schlechtesten" Restklassen (d.h. diejenigen, für die $r(n)$ am kleinsten ist) alle extrem viele Primzahlen im Intervall $(q^{\alpha_l}, q^{\alpha_{l+1}}]$ enthalten. Nach der Brun-Titchmarsh Ungleichung wären das maximal ca. $Cx(\varphi(q)\log x)^{-1}$ Stück ($x = q^{\alpha_{l+1}}$, $C = C(\alpha_{l+1})$). Alle anderen (besseren) Restklassen könnten keine Primzahl beinhalten. Gemäß diesen Annahmen haben wir dann nach Primzahlsatz ca. $C^{-1}\varphi(q)$ Restklassen $a \pmod q$ (sei A die Menge dieser a), welche alle im Intervall $(q^{\alpha_l}, q^{\alpha_{l+1}}]$ ca. $Cx(\varphi(q)\log x)^{-1}$ Primzahlen enthalten. Die anderen Restklassen besitzen in diesem Intervall keine Primzahlen. Weiterhin ist $r(a)$ für

[3] Es gibt verschiedene Versionen der Brun-Titchmarsh Ungleichung. Diese ist für unsere Zwecke die beste, die uns bekannt ist.

$a \in A$ so klein wie möglich, mit anderen Worten besteht also $\{r(a) \mid a \in A\}$ genau aus den $C^{-1}\varphi(q)$ kleinsten Werten der Menge $\{r(a) \mid 1 \leq a \leq q,\ (a,q) = 1\}$.

Nun ist $(1+\Re\{\chi_j(a)\}) = 1+\cos(\theta_j(a))$, wobei $\theta_j(a)$ auf $[0,2\pi]$ näherungsweise gleichverteilt ist für verschiedene a mit $(a,q) = 1$. Wegen dieser Gleichverteilung und der Konstruktion der Menge A gilt dann für $a \in A$ ungefähr

$$\theta_j(a) \in \pi + \left[-\frac{C^{-1}}{2}2\pi, \frac{C^{-1}}{2}2\pi\right].$$

Nimmt man zusätzlich an, dass die Verteilung von $\theta_1(a)$ unabhängig von $\theta_2(a)$ ist, so erhält man im „Mittel“[4]

$$r(n) \approx (1 + \cos(\pi + \frac{C(\alpha_{l+1})^{-1}}{4}2\pi))^2. \tag{7.8}$$

Setze nun in S_l für $r(n)$ den Wert aus (7.8) ein und streiche das $\chi_0(n)$. Teile die verbleibende Summe in $C^{-1}\varphi(q)$ Summen $S_{l,a}$ über die verschiedenen Restklassen $a \in A$ ein; die anderen Restklassen liefern nach Annahme keinen Beitrag. Benutzt man die obige Annahme zu der Anzahl der Primzahlen in diesen Restklassen, so erhält man insgesamt

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}S \approx& \mathscr{L}^{-1}\sum_{l=1}^{M}\sum_{a\in A}\sum_{\substack{q^{\alpha_l}<p\leq q^{\alpha_{l+1}}\\ p\equiv a \pmod q}}(\log p)n^{-\beta_1}f(\mathscr{L}^{-1}\log p)r(a)\\
\approx& \sum_{l=1}^{M}(1+\cos(\pi+\frac{C(\alpha_{l+1})^{-1}}{4}2\pi))^2\int_{\alpha_l}^{\alpha_{l+1}} f(t)e^{\lambda_1 t}\,dt\\
\approx& \int_1^{x_0} f(t)e^{\lambda_1 t}(1+\cos(\pi+\frac{C(t)^{-1}}{4}2\pi))^2\,dt.
\end{aligned}$$

Dabei wurde angenommen, dass $(\alpha_{l+1}-\alpha_l)$ klein genug ist in Abhängigkeit von ε und f. Ersetzt man nun $\mathscr{L}^{-1}S$ in (7.5) durch den soeben erhaltenen Wert, dann folgt

$$0 \leq F(-\lambda_1) - F(0) - F(\lambda_2-\lambda_1) + \frac{f(0)}{2} - \int_1^{x_0} f(t)e^{\lambda_1 t}(1+\cos(\pi+\frac{\pi}{2}C(t)^{-1}))^2\,dt + \varepsilon. \tag{7.9}$$

Optimiert man letzte Ungleichung nach f, so bekommt man für $\gamma = 1.09$

$$\lambda_1 \leq 0.54 \Rightarrow \lambda_2 \geq 0.664.$$

Im Vergleich zu der trivialen Abschätzung von S ist dies eine Verbesserung um 0.008. Verbesserungen in dieser Größenordnung helfen uns nicht weiter (ab ca. 0.02 schon). Außerdem bemerken wir, dass wir an einer Stelle zu gut rechneten (nämlich bei (7.8)). Weiterhin benutzen wir später anstelle von (7.3) etwas ungünstigere Ungleichungen (mit drei anstatt zwei Faktoren), so dass die Verbesserung dann nochmals kleiner wird. Letztendlich erwarten wir bei rigorosem Vorgehen Verbesserungen von ca. 0.001 für die entsprechenden Abschätzungen der λ_j bzw. λ'.

[4]Nehme hier an, dass $(1+\Re\{\chi_j(a)\})$ im Mittel gleich $(1+\cos(\pi+\frac{C^{-1}}{4}2\pi))$ ist. Gehe dann grob vor und multipliziere die beiden Mittel einfach miteinander, um das Mittel für $r(n)$ zu schätzen. Man beachte, dass aufgrund der Struktur der Funktion $(1+\cos(\pi+t))$ eine genauere Analyse einen noch schlechteren Wert für das sogenannte Mittel liefern würde.

7.7 Verbesserte Abschätzungen für $\phi(\chi)$ - VB4

In den Ungleichungen vom Typ (7.4) tauchen immer verschiedene Charaktere χ auf. In der Regel mussten wir für alle χ die Abschätzung $\phi(\chi) \leq \frac{1}{3}$ benutzen. Durch eine genauere Analyse der Größe der verschiedenen $\phi(\chi)$ erhält Heath-Brown Verbesserungen für die λ_2-Abschätzungen im Fall, dass χ_1 und ρ_1 beide reell sind.

Konkret sieht die Verbesserung so aus, dass man in [23, Lemma 8.5] den Wert $\frac{11}{24} = 0.4583...$ durch $\frac{97}{216} = 0.4490...$ ersetzen kann. Dies führt zu entsprechenden Verbesserungen an den Stellen, an denen letzteres Lemma angewendet wurde. Also in [23, Lemma 8.6] (ersetze $\frac{12}{11}$ durch $\frac{108}{97}$) und damit auch in [23, Theorem 4 (S.268)]. Außerdem bekommt man bessere Werte in [23, Table 5, 6]. In „Table 5“ beispielsweise bekommt man Verbesserungen der λ_2-Abschätzungen um ca. $0.05 - 0.15$.

7.8 Eine weitere Variation in der Herleitung der Nullstellendichte für große λ - VB6

Vergleiche für diesen Abschnitt die Kommentare und Notationen aus §3.2.2 und §5.1. Die Konstanten w, u, v, x wählen wir so wie in [23, S.321 und Lemma 11.1]. Also $w = c_1 - \varepsilon$, $u = \phi + 2c_1$, $v = \phi + 2c_1 + c_2$, $x = 2\phi + 3c_1 + c_2$ mit $c_1 = \frac{1}{10}$ und $c_2 = \frac{1}{4}$.

Heath-Brown beschreibt in [23, S.335] eine grobe Vorgehensweise für dieses Potential, bei der man eine Verbesserung der Konstante auf der rechten Seite der Ungleichung [23, (11.4)] bekommt und zwar von $\frac{67}{6} = 11.1666...$ auf $\frac{67}{6} - \eta$ mit einem gewissen $\eta < 0.0001$. Es bleibt die Frage, ob man das η durch eine Verfeinerung der Argumente merklich vergrößern kann? Wir führten eine gewisse Verfeinerung durch und bekamen nur $\eta \approx 0.01$, was sich übersetzt in einen Gewinn von ≤ 0.001 für die zulässige Linniksche Konstante L. Im Folgenden möchten wir diese Verfeinerung skizzieren und dabei gleichzeitig zeigen, um was es sich bei diesem Potential handelt.

Wir erinnern an die Ungleichung (3.29), also

$$\sum_{\chi} w_\chi \leq (1 + O(\mathscr{L}^{-1})) \sum_{\chi} \left| \sum_n a_{n\chi} b_n \right|^2, \tag{7.10}$$

wobei wir

$$a_{n\chi} = w_\chi^{\frac{1}{2}} (\sum_{d|n} \theta_d) \chi(n) n^{\frac{1}{2} - \rho(\chi)} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U})^{\frac{1}{2}} \tag{7.11}$$

und

$$b_n = (\sum_{d|n} \psi_d) n^{-\frac{1}{2}} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U})^{\frac{1}{2}} \tag{7.12}$$

setzen. Dabei ist $\psi_d = \psi_d^{U,V}$. In VB6 wird angemerkt, dass für einige $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$h_1(n) = \sum_{d|n} \theta_d = 0.$$

Gleichung (7.10) bleibt also wahr, wenn man für diese n dann $b_n = 0$ anstelle von (7.12) setzt. Diese leichte Änderung in den b_n führt dann zu einer Verbesserung bei der Konstanten auf der rechten Seite der Gleichung [23, (11.14)] um

$$S = \sum_{\substack{n=1 \\ h_1(n)=0}}^{\infty} (\sum_{d|n} \psi_d)^2 n^{-1} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U}). \tag{7.13}$$

Kann man $S \geq \eta' > 0$ beweisen, so resultiert dies in eine Verbesserung von $\eta = \frac{1}{2w}\eta' = 5\eta'$ für die Konstante auf der rechten Seite von [23, (11.4)].

Wir müssen einerseits bestimmen für welche n wir $h_1(n) = 0$ haben und andererseits wie

$$h_2(n) = \sum_{d|n} \psi_d$$

für diese n ausfällt, um schließlich die Summe über diese n, also S, abschätzen zu können. Zuerst bemerken wir, dass $h_1(n)$ und $h_2(n)$ nur vom quadratfreien Teil von n (also $\prod_{p|n} p$) abhängen.

Hat n keinen oder genau einen Primfaktor, so ist $h_1(n) \neq 0$. Wir betrachten im folgenden nur diejenigen n, die genau drei Primfaktoren haben, also $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$. Die Analyse für $4, 5, \dots$ Primfaktoren geht analog und wird „überproportional komplizierter“. Wir haben keinen Weg gefunden alle n gleichzeitig zu betrachten und dies erscheint auch recht schwer, da $h_1(n)$ und $h_2(n)$ sehr stark von der Anzahl der Primfaktoren von n und deren Lage zueinander abhängen.

Weiterhin liefert eine genauere Betrachtung der Summe (7.13) die Vermutung, dass die nicht quadratfreien n nur einen vernachlässigbaren Beitrag verursachen[5], also beschränken wir uns auf quadratfreie n. Wir betrachten ab jetzt also nur noch $n = p_1 p_2 p_3$ mit Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3$.

Für diese n gilt

$$h_1(n) = 0 \iff p_1 p_2 p_3 \leq W \text{ oder } (p_1 p_2 \leq W \text{ und } p_3 > W).$$

Der Beitrag aller n mit $1 < n \leq W\,(\leq U)$ zu S ist wegen $h_2(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = 0$ auch gleich Null. Also bleibt jetzt die Aufgabe

$$\sum_{\substack{n=p_1p_2p_3 \\ p_1p_2 \leq W,\ p_3 > W}} h_2(n)^2 n^{-1} (e^{-n/X} - e^{-n\mathscr{L}^2/U}) \tag{7.14}$$

zu berechnen. Es gilt $2w < u$ und $w + u < v$. Damit bekommt man für $p_1 < p_2 < p_3$, $p_1 p_2 \leq W$ und $p_3 > W$ die Gleichung

$$\left(\log \frac{V}{U}\right) h_2(p_1p_2p_3) = \begin{cases} \log \frac{p_1p_2p_3}{U} & p_3 \in (\frac{U}{p_1p_2}, \frac{U}{p_2}], \\ \log p_1 & p_3 \in (\frac{U}{p_2}, \frac{U}{p_1}], \\ \log \frac{U}{p_3} & p_3 \in (\frac{U}{p_1}, U], \\ \log \frac{V}{p_1p_2p_3} & p_3 \in (\frac{V}{p_1p_2}, \frac{V}{p_2}], \\ -\log p_1 & p_3 \in (\frac{V}{p_2}, \frac{V}{p_1}], \\ \log \frac{p_3}{V} & p_3 \in (\frac{V}{p_1}, V], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.15}$$

Wir zeigen beispielhaft, welchen Beitrag man zur Summe (7.14) bekommt für $p_3 \in (\frac{U}{p_1}, U]$:

[5] Diese Überlegung basiert auf der folgenden Ungleichung, die für $p_1, p_2, p_3 \geq M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{\alpha_1 \geq 1} \sum_{\alpha_2 \geq 1} \sum_{\alpha_3 \geq 1} \frac{1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{1}{p_2^{\alpha_2}} \frac{1}{p_3^{\alpha_3}} - \frac{1}{p_1p_2p_3} = \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} - \frac{1}{p_1p_2p_3} \leq \frac{\varepsilon}{p_1p_2p_3}.$$

$$\sum_{\substack{n=p_1p_2p_3,\, p_1p_2\le W\\ p_3\in[\frac{U}{p_1},U]}} h_2(n)^2 n^{-1}(e^{-n/X}-e^{-n\mathscr{L}^2/U})$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(1+o(1))}{(v-u)^2\mathscr{L}^2}\sum_{\substack{n=p_1p_2p_3\\ p_1p_2\le W,\, p_3\in[\frac{U}{p_1},U]}}(u^2\mathscr{L}^2-2u\mathscr{L}\log p_3+\log^2 p_3)\frac{1}{p_1p_2p_3}\\
&=:(S_1+S_2+S_3).
\end{aligned}$$

Dabei entspricht S_i der Summe mit dem i-ten Term in der inneren Klammer. Mit

$$\sum_{p\le x} p^{-1}=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

bekommen wir für $q\to\infty$, dass

$$\begin{aligned}
S_1 =&\frac{(1+o(1))u^2\mathscr{L}^2}{(v-u)^2\mathscr{L}^2}\sum_{p_1<W^{\frac12}}\frac{1}{p_1}\sum_{p_1<p_2\le\frac{W}{p_1}}\frac{1}{p_2}\sum_{\frac{U}{p_1}<p_3\le U}\frac{1}{p_3}\\
=&\frac{(1+o(1))u^2}{(v-u)^2}\sum_{p_1<W^{\frac12}}\frac{1}{p_1}\left(\log\frac{\log(W/p_1)}{\log p_1}\right)\left(\log\frac{\log U}{\log(U/p_1)}\right)\\
=&(1+o(1))\frac{u^2}{(v-u)^2}\int_0^{\frac{w}{2}}\frac{1}{s}\left(\log\frac{w-s}{s}\right)\left(\log\frac{u}{u-s}\right)ds.
\end{aligned}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen benutzt man partielle Summation und den Primzahlsatz und führt im anschließenden Integral die Substitution $t=q^s$ durch (Empfehlung: wähle als zu differenzierende Funktion $h(t)=t^{-1}\log\frac{\log(W/t)}{\log t}\log\frac{\log U}{\log(U/t)}$ aus).

Die gleiche Prozedur müssen wir auch für S_2 und S_3 durchführen und erhalten[6] $S_1+S_2+S_3\approx 0.0002$. Dieselbe Prozedur muss für die anderen Fälle in (7.15) gemacht werden. Insgesamt bekommen wir für den Beitrag der $n=p_1p_2p_3$ in (7.13) ca. den Wert 0.002, bekommen also ungefähr $\eta'\ge 0.002$. Der entsprechende Beitrag für die angesprochene Konstante 11.16... ist dann $\eta\approx 0.01\,(=\frac{1}{2w}0.002)$.

Wir haben die Analyse auch mit 4 und 5 Primfaktoren vorangetrieben (man beachte, dass die Kompliziertheit stark ansteigt, einerseits bei der Analyse von $h_1(t)$ und $h_2(t)$, andererseits bei der Analyse der auftretenden Summen). Bei vier Primfaktoren haben wir beispielsweise für eine zu $S_1+S_2+S_3$ analoge Summe ca. den Wert 0.00004 erhalten. Dazu muss man sagen, dass im Fall von vier Primfaktoren es mehr von diesen Summen geben wird, die zusammenzuaddieren sind. Wir haben auch ein paar Berechnungen im Fall mit fünf Primfaktoren durchgeführt. Zusammenfassend ist aber festzuhalten, dass wir durch unsere Berechnungen kein für unsere Zwecke hinreichend großes η' beweisen konnten, noch bekamen wir einen Hinweis darauf, dass durch eine viel längere Analyse ein solches zu erreichen gewesen wäre.

Ähnliches gilt für die Verwendung von VB6 in Verbindung mit dem Verfahren aus [23, §4]. Dieses Verfahren haben wir in unserer Arbeit nicht verwendet, da das alternative Verfahren aus

[6] Die Rechnungen lassen sich vereinfachen, denn es gilt

$$S_1+S_2+S_3=\frac{1+o(1)}{(v-u)^2}\int_0^{w/2}s_1^{-1}\int_{s_1}^{w-s_1}s_2^{-1}\int_{u-s_1}^{u}\frac{(u-s_3)^2}{s_3}\,ds_3\,ds_2\,ds_1.$$

[23, §5] sich für unsere Zwecke als überlegen erwies.

7.9 Verbesserte Abschätzungen der Nullstellendichte für kleine λ - VB8

Mit diesem Potential kann man die Abschätzungen von $N(\lambda)$ für kleine λ verbessern (verglichen mit der Anwendung von [23, Lemma 12.1]), falls man gute λ_2-Abschätzungen zur Verfügung hat. Konkret bekommt man gute Verbesserungen für den Fall $\lambda_1 \leq 0.60$ und für größeres λ_1 nur sehr geringe bis keine Verbesserungen. Unser Lemma 5.3 mit $B_1 = D_1 = 0$ erweist sich jedoch für unsere Arbeit in allen λ_1-Bereichen als überlegen.

Wie bei VB4, so muss man auch hier keine weitere Arbeit mehr vornehmen. Aus [23, §12, (16.7) und (16.8)] folgt sofort

Lemma 7.2 (S.336 in [23])**.** *Seien $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0, 2)$, $\lambda_{21} > 0$ Konstanten mit $\lambda_{21} < \lambda$. Weiterhin sei f eine Funktion, die Bedingung 1 und 2 erfüllt und für die gilt*

$$F(\lambda - \lambda_{21}) > \frac{f(0)}{6} \quad \textit{und} \quad \left(F(\lambda - \lambda_{21}) - \frac{f(0)}{6}\right)^2 > F(-\lambda_{21})\frac{f(0)}{6}.$$

Ferner gelte $\lambda_2 \geq \lambda_{21}$. Dann haben wir für $q \geq q_0(\varepsilon, f)$ die Abschätzung

$$N(\lambda) \leq 3S_1 + 2,$$

wobei

$$S_1 = \frac{F(-\lambda_{21})(F(-\lambda_{21}) - \frac{f(0)}{6})}{(F(\lambda - \lambda_{21}) - \frac{f(0)}{6})^2 - F(-\lambda_{21})\frac{f(0)}{6}} + \varepsilon.$$

Literaturverzeichnis

[1] Balog A., Granville A. und Soundararajan K., *Multiplicative Functions in Arithmetic Progressions*, arXiv:math/0702389v1 [math.NT], 13 Feb 2007; erscheint demnächst in Ann. Sci. Math. Québec.

[2] Barban M.B. und Vehov P.P., *On an extremal problem (Russian)*, Trans. Moscow Math. Soc. 18 (1968), 91-99; siehe auch Trudy Moskov. Mat. Obsc. 18 (1968) 83-90.

[3] Brüdern J., *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer Lehrbuch (1995).

[4] Chen J., *On the least prime in an arithmetical progression*, Sci. Sinica 14 (1965) 1868-1871.

[5] Chen J., *On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions*, Sci. Sinica 20 (1977) 529-562.

[6] Chen J., *On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions II*, Sci. Sinica 22 (1979) 859-889.

[7] Chen J. und Liu J. M., *On the least prime in an arithmetical progression (III), (IV)*, Science in China Ser. A 32 (1989) 654-673, 792-807.

[8] Chen J. und Liu J. M., *On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet L-functions (V)*, International Symposium in Memory of Hua Loo Keng Vol. I (Beijing, 1988), Springer-Verlag, Berlin (1991) 19-42.

[9] Elliott P.D.T.A., *The least prime primitive root and Linnik's theorem*, Number theory for the millennium, I (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA (2002) 393-418.

[10] Friedlander J. und Iwaniec H., *Exceptional characters and prime numbers in arithmetic progressions*, Int. Math. Res. Not., no. 37, 2033-2050 (2003).

[11] Friedlander J. und Iwaniec H., *Opera de cribro*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 57 (2010).

[12] Friedlander J. und Granville A., *Limitations to the equi-distribution of primes III*, Compositio Math. 81 (1992), no. 1, 19-32.

[13] Goldston D.A. und Yildirim C.Y., *Higher correlations of divisor sums related to primes III: k-Correlations*, arXiv:math/0209102v1 [math.NT] 10 Sep 2002.

[14] Goldston D.A., Pintz J. und Yildirim C.Y., *Primes in tuples I*, Ann. of Math., 170 (2009) 819-862.

[15] Graham S.W., *Applications of sieve methods*, Ph.D. Thesis, University of Michigan (1977).

[16] Graham S.W., *An asymptotic estimate related to Selberg's sieve*, J. Number Theory 10 (1978) 83-94.

[17] Graham S.W., *On Linnik's constant*, Acta Arith. 39 (1981) 163-179.

[18] Graham S.W. und Pomerance C., *On the least prime in certain arithmetic progressions*, J. London Math. Soc. (2) 41 (1990) 193-200.

[19] Granville A. und Soundararajan K., *The Distribution of Prime Numbers*, http://www.dms.umontreal.ca/ andrew/PDF/PretendBook050111.pdf (Stand: 25. März 2011).

[20] Hardy G.H. und Wright E.M, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, Oxford Science Publications, Aberdeen (1978).

[21] Heath-Brown D.R., *Zero density estimates for the Riemann zeta-function and Dirichlet L-functions*, J. London Math. Soc. (2) 19 (1979), no. 2, 221-232.

[22] Heath-Brown D.R., *Siegel zeros and the least prime in an arithmetic progression*, Quart. J. Math Oxford (2) 41 (1990) 405-418.

[23] Heath-Brown D.R., *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) 64 (1992) 265-338.

[24] Huxley M.N., *Large values of Dirichlet polynomials III*, Acta Arith. 26 (1974) 435-444.

[25] Iwaniec H., *On zeros of Dirichlet's L-series*, Invent. Math. 23 (1974) 97-104.

[26] Iwaniec H. und Kowalski E., *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53 (2004).

[27] Jutila M., *A new estimate for Linnik's constant*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 471 (1970) 8ff.

[28] Jutila M., *On Linnik's constant*, Math. Scand. 41 (1977) 45-62.

[29] Linnik Yu.V., *On the least prime in an arithmetic progression I. The basic theorem*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 15(57) (1944) 139-178.

[30] Linnik Yu.V., *On the least prime in an arithmetic progression II. The Deuring-Heilbronn phenomenon*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 15(57) (1944) 347-368.

[31] Liu M.C. und Wang T., *A numerical bound for small prime solutions of some ternary linear equations*, Acta Arith. 86 (1998) 343-383.

[32] Montgomery H.L. und Vaughan R.C., *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics (2007).

[33] Motohashi Y., *On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974) 306-323.

[34] Motohashi Y., *Primes in arithmetic progressions*, Invent. Math. 44 (1978) 163-178.

[35] Motohashi Y., *Lectures on Sieve Methods and Prime Number Theory*, Tata Institute of Fundamental Researach, Bombay (1983).

[36] Murty M.R., *Problems in Analytic Number Theory (Second Edition)*, Springer Graduate Texts in Mathematics, Canada (2008).

[37] Pan C.D., *On the least prime in an arithmetical progression*, Sci. Record (N.S.) 1 (1957) 311-313.

[38] Pan C.D., *On the least prime in an arithmetical progression*, Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis 4 (1958) 1-34.

[39] Turan P., *On some recent results in the analytic theory of numbers*, Number Theory Institute, 1969, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 20 (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971) 359-374.

[40] Wagstaff S.S., *Greatest of the least primes in arithmetic progressions having a given modulus*, Math. Comp. 33 (1979) 1073-1080.

[41] Wang W., *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica 29 (1986), no. 6, 826-836.

[42] Wang W., *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica 7 (1991), no. 3, 279-289.

[43] Xylouris T., *Über die Linniksche Konstante*, Diplomarbeit, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, arXiv:0906.2749v1 [math.NT] 15 Jun 2009.

[44] Xylouris T., *On the Least Prime in an Arithmetic Progression and Estimates for the Zeros of Dirichlet L-Functions*, erscheint demnächst in Acta Arithmetica.