

Utilisation de la notion de compacité

Dimitri A. COBB

4 avril 2018

Résumé

Ce texte est un mémoire destiné à l'obtention d'un diplôme de Master permettant de présenter le concours de l'agrégation externe de Mathématiques. Il s'agit du compte rendu d'un oral blanc portant sur la leçon 203 (du programme 2018), *Utilisation de la notion de compacité*, présenté devant les agrégatifs de l'*Université de Rennes 1* et sous la supervision de Jean-Christophe BRETON. Les recherches bibliographiques ainsi que la préparation de la leçon ont été effectuées en binôme avec Maxence PHALEMPIN.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Plan de la leçon	2
2.1	Définitions	2
2.2	Application à l'existence d'éléments	3
2.3	Extremalisation de fonctions continues	5
2.4	Régularité et régularisation	6
2.5	Compacité dans les espaces de fonctions	8
2.6	Opérateurs compacts	9
3	Développements	12
3.1	Alternative de Fredholm	12
3.2	Théorème du point fixe de Brouwer dans le plan	14

1 Introduction

Les compacts sont une classe d'espaces topologiques bénéficiant de propriétés particulièrement agréables. Ces propriétés, qui découlent toutes de la définition de la compacité, se rangent en (essentiellement) trois catégories :

Théorèmes d'existence d'éléments : toute suite d'éléments d'un compact possède nécessairement une valeur d'adhérence. Cela induit un grand nombre de théorèmes d'existence d'objets qui seront étudiés dans la première partie du plan.

Extremalisation de fonction continues : toute fonction continue à valeurs réelles définie sur un compact admet un maximum et un minimum. Même si la possession d'un extremum est une conséquence des théorèmes

d'existence que nous venons de décrire, la variété des applications de ce seul principe justifie que ce thème soit traité à part.

Régularité et régularisation : Les fonctions continues définies sur un ensemble compact bénéficient souvent de meilleures propriétés : bicontinuité automatique, uniforme continuité, etc. De même, elle seront, dans de nombreux cas, plus facilement sujettes à l'approximation par des fonctions régulières.

Après quelques brefs rappels, ces trois thèmes sont abordés et illustrés dans la leçon. Ils sont suivis d'une section consacrée à la compacité dans certains espaces de fonctions et d'une section consacrée aux opérateurs compacts sur un espace de Banach. Ces deux dernières sections illustrent de manière plus élaborée les divers principes exposés dans les parties précédentes.

Enfin, deux points de la leçon sont entièrement démontrés et commentés dans la dernière partie de ce texte. Il s'agit du théorème du point fixe de Brouwer pour un disque plan et de l'alternative de Fredholm portant sur les opérateurs compacts d'un espace de Banach.

Les références bibliographiques ayant servies à constituer le plan de la leçon et à l'écriture des développements sont données à la fin de ce texte. Nous y faisons ponctuellement référence pour indiquer l'endroit où l'on peut trouver les théorèmes et démonstrations de résultats un peu moins courants dans le cadre de l'agrégation. Pour le reste, les aspects topologiques proviennent essentiellement de [6] tandis que les énoncés ayant trait à l'analyse fonctionnelle proviennent surtout de [2].

2 Plan de la leçon

Ce qui suit est le plan d'une leçon d'agrégation agrémenté de quelques explications aux endroits opportuns, et reprend le format traditionnel des épreuves orales. Le style de rédaction est donc nécessairement très sec, même si tout le possible a été fait pour le rendre aussi digeste que faire se peut.

2.1 Définitions

Définition 1. On considère (X, \mathcal{T}) un espace topologique.

1. L'espace X est dit *compact* si sa topologie est séparée et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, c'est à dire que tout recouvrement par des ouverts

$$X = \bigcup_{i \in I} \Omega_i \tag{1}$$

(où $\Omega_i \in \mathcal{T}$ et I est un ensemble quelconque) admet un sous-recouvrement fini

$$X = \bigcup_{j \in J} \Omega_j, \tag{2}$$

(où $J \subset I$ est un ensemble fini).

2. Une partie $A \subset X$ est dite compacte si elle l'est pour la topologie induite.

Remarque 2. On notera que nous incluons dans la définition de compacité la notion de séparation. Par exemple, un espace topologique quotient d'un espace compact ne sera compact pour la topologie quotient que si celle-ci est séparée. De la même manière, \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact alors que \mathbb{R}/\mathbb{Q} ne l'est pas quand bien même ce dernier espace topologique bénéficie de la propriété 1. de Borel-Lebesgue.

Exemple 3. Les compacts de l'espace euclidien \mathbb{R}^n (où $n \geq 1$) sont exactement les parties fermées bornées. En particulier la boule unité $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ est compacte, ainsi que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

2.2 Application à l'existence d'éléments

Le théorème phare de cette section est le théorème des fermés emboîtés. Il s'agit d'une application directe de la définition 1.

Théorème 4 (Fermés emboîtés). *Soit X un espace topologique compact et $\cdots \subset F_n \subset \cdots \subset F_2 \subset F_1 \subset F_0$ une suite de fermés non vides de X . Alors l'intersection $\bigcap_n F_n$ est non vide.*

Application 5. L'ensemble triadique de Cantor est une partie non vide et non dénombrable de $[0, 1]$.

Application 6. Tout espace topologique compact possède la propriété de Baire.

Proposition 7 (Compacité séquentielle). *Soit X un espace topologique compact et (x_n) une suite de points de X . Alors (x_n) possède au moins une valeur d'adhérence. On dit que X est séquentiellement compact.*

Corollaire 8. *Il résulte de la proposition précédente que tout espace métrique compact est automatiquement complet.*

Application 9. Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ une partie compacte. Pour tout $y \notin K$, la distance¹ $d(y, K)$ est non nulle et atteinte en un point $x \in K$.

Proposition 10. *Soit X un espace métrique séquentiellement compact. Alors X est compact.*

Ce critère de compacité permet de montrer qu'un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est compact (pour la métrique produit) via un procédé nommé *extraction diagonale*.

Proposition 11. *On considère $(X_i, d_i)_{i \geq 0}$ une famille d'espaces métriques compacts. Alors l'espace produit $\prod_{i \geq 0} X_i$ muni de la métrique*

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min \{1, d_i(x_i, y_i)\} \quad (3)$$

est compact.

1. La distance $d(y, K)$ de y à K est définie par $d(y, K) = \inf_{x \in K} d(x, y)$.

Remarque 12. De manière plus générale, le théorème de Tychonoff assure qu'un produit quelconque d'espaces topologiques compacts est encore un espace topologique compact pour la topologie produit. Mais la démonstration de cet énoncé n'est pas élémentaire, puisque impliquant le lemme de Zorn.

Corollaire 13 (Un théorème de compacité séquentielle faible). *Soit E un \mathbb{C} -espace de Banach et T_1, T_2, \dots des formes linéaires continues sur E telles que $\|T_n\| \leq 1$ pour $n \geq 1$. Alors il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et une application linéaire continue $T : E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad T_{\phi(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x). \quad (4)$$

Application 14 (Un ensemble de Sidon). Soit $q \geq 3$ entier et $\Lambda = \{q^k, k \geq 0\}$. On note $L_\Lambda^\infty(\mathbb{U})$ l'ensemble des fonctions f mesurables bornées sur le cercle unité \mathbb{U} telles que

$$\text{Sp}(f) = \text{supp}(\hat{f}) \subset \Lambda. \quad (5)$$

Alors,

$$\forall f \in L_\Lambda^\infty(\mathbb{U}), \quad \sum_{n \in \Lambda} |\hat{f}(n)| \leq C_q \|f\|_{L^\infty} \quad (6)$$

où $C_q \leq 2$ est une constante ne dépendant que de q .

La démonstration de ce dernier point par compacité faible peut être trouvée dans [5] au Chapitre 5, dans la section consacrée aux espaces de Sidon. Et [8] en propose une démonstration alternative dans le chapitre portant sur la convergence absolue des séries de Fourier.

La compacité séquentielle des espaces compacts donne également lieu à une variété de théorèmes de points fixes, dont nous donnons trois exemples : les théorèmes de Kakutani, de Brouwer et une variante du théorème de Picard-Banach. Ces trois théorèmes se distinguent par la nature des hypothèses requises à leur fonctionnement.

Le théorème de Picard-Banach nécessite une hypothèse forte sur la fonction dont on cherche un point fixe (qu'elle soit contractante) mais fonctionne sous une hypothèse très générale sur l'espace sur lequel la fonction agit (qu'il soit complet).

En revanche, le théorème de Brouwer relâche cette hypothèse et ne demande que la continuité de l'application, mais en exigeant une contrainte topologique sur l'espace sur lequel la fonction agit (la convexité et compacité).

Enfin, le théorème de Kakutani cumule ces deux types de contraintes (la fonction doit être affine continue et définie sur un convexe compact), mais présente l'avantage d'être vérifié dans le cadre très général des espaces vectoriels topologiques.

Application 15 (Théorème du point fixe de Brouwer). Soit $\bar{\mathbb{D}} \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ une application continue. Alors f possède un point fixe.

Remarque 16. Tout compact convexe d'intérieur non vide de \mathbb{R}^2 est homéomorphe au disque $\bar{\mathbb{D}}$ si bien que le théorème de Brouwer s'étend aussi à de telles parties du plan.

Application 17 (Théorème du point fixe de Kakutani). Soit E un espace vectoriel topologique et $K \subset E$ un convexe compact non vide. Toute application affine continue $T : K \rightarrow K$ admet un point fixe.

Application 18 (Théorème du point fixe de Picard-Banach, variante). Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ vérifiant

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq d(x, y). \quad (7)$$

Alors la fonction f admet un point fixe.

Remarque 19. Ce dernier théorème se distingue du théorème de Picard-Banach qui assure que si X est seulement complet, il suffit de remplacer la condition (7) par la condition suivante :

$$\exists 0 < k < 1 \mid \forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y). \quad (8)$$

Nous terminons cette section avec une caractérisation *par la dimension algébrique* de la compacité de la boule unité d'un espace normé.

Théorème 20 (de Riesz). *Soit E un espace normé. Alors E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.*

Ce théorème se montre à l'aide du lemme suivant que nous utiliserons et démontrerons lorsque nous étudierons l'alternative de Fredholm.

Lemme 21 (de Riesz). *Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé strict. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, il est possible de fixer $u \in E$ de norme unitaire $\|u\| = 1$ tel que $d(u, F) \geq 1 - \epsilon$.*

Corollaire 22. *L'espace vectoriel $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$, muni de la métrique que nous donnons plus bas à la Remarque 52, ne peut-être muni d'une structure d'espace normé compatible avec cette métrique, c'est à dire induisant la même topologie.*

2.3 Extremalisation de fonctions continues

Les deux résultats principaux de cette section sont les suivants :

Théorème 23. *Soit X un espace topologique compact et Y un espace topologique séparé. Alors, pour toute fonction continue $f : X \rightarrow Y$, l'ensemble $f(X)$ est une partie compacte de Y .*

Corollaire 24. *Soit X un espace topologique compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f atteint ses bornes.*

Les résultats suivants s'y ramènent donc *via* la résolution d'un problème d'extremalisation sur un compact.

Application 25 (Equivalence des normes). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ deux normes sur E . Alors les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.

Application 26 (Théorème de Rolle). Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 27. Le théorème de Rolle a pour conséquence la formule de Taylor suivante : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^n sur $[a, b]$ et $(n + 1)$ -fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad (9)$$

Application 28 (Théorème spectral). Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors :

1. La matrice A admet une valeur propre réelle.
2. La matrice A est diagonalisable en base orthonormée sur \mathbb{R}^n .

Remarque 29. Dans la démonstration du théorème précédent, le premier point est le point le plus difficile à montrer et le deuxième en découle. Pour montrer ce premier point, on extremalise l'application $x \mapsto \frac{\langle Ax|x \rangle}{|x|^2}$ sur la sphère unité de \mathbb{R}^n .

Application 30 (Décomposition polaire [7]). Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible réelle. Alors il existe un unique couple $(S, O) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. De plus, O^{-1} est le maximum sur le compact $O_n(\mathbb{R})$ de l'application $U \mapsto \text{Tr}(UA)$.

Application 31 (Théorème des phases de Salem). On considère des amplitudes $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe des phases $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathbb{R}$ telles que

$$\left\| \sum_{k=1}^n \rho_k \cos(kt + \phi_k) \right\|_{L_t^\infty} \leq C \log(n) \left(\sum_{k=1}^n \rho_k^2 \right)^{1/2} \quad (10)$$

où $C > 0$ est une constante numérique².

On pourra consulter le cinquième chapitre, deuxième section, de [3] pour deux démonstrations du théorème de Salem. La première optimise les phases (ϕ_k) , définies sur le compact \mathbb{U}^n , tandis que la deuxième utilise les inégalités de Khintchine.

Remarque 32. On peut montrer que le terme $\log(n)$ dans le théorème de Salem est optimal, c'est à dire qu'il ne peut pas être remplacé par un terme de croissance plus lente. La démonstration que propose [3] de ce fait utilise les propriétés des ensembles de Sidon (voir [5] ou l'Application 14 de ce même document) mais une démonstration élémentaire est également possible.

2.4 Régularité et régularisation

Proposition 33. Soit X, Y deux espaces topologiques séparés et $f : X \rightarrow Y$ continue et bijective. Si X est compact alors f est un homéomorphisme.

Application 34. Soit E un espace normé, $K \subset E$ un compact non vide et $f : K \rightarrow K$ une application surjective et 1-lipschitzienne. Alors f est une isométrie.

². Nous nommons constante *numérique* une constante qui ne dépend d'aucun paramètre et à laquelle on pourrait donner une valeur précise si l'envie nous en prenait.

Théorème 35 (de Heine). *On considère deux espaces métriques X et Y et une application continue $f : X \rightarrow Y$. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

Application 36. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$. Alors :

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^p_x} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (11)$$

Remarque 37. Pour montrer cela, on approche f par des fonctions continues à support compact (donc uniformément continues) en topologie L^p .

Application 38. Les fonctions continues sur un segment à valeurs réelles sont intégrables au sens de Riemann.

Théorème 39 (premier, de Dini). *Soit X un espace topologique compact et $f_1, f_2, \dots : X \rightarrow \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues : $f_1 \leq f_2 \leq \dots$. Si les f_n convergent simplement vers une fonction continue alors cette convergence est uniforme.*

Application 40. Soit X un espace topologique compact et H un espace de Hilbert admettant une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$. Alors, pour toute application continue $h : X \rightarrow H$, on a

$$\sum_{k=1}^N \|\langle e_n | h(x) \rangle\|^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \|h(x)\|^2 \quad \text{uniformément pour } x \in X. \quad (12)$$

Application 41. Les fonctions réglées (limites uniformes de fonctions étagées) sont Riemann-intégrables.

Théorème 42 (deuxième, de Dini). *Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} (ou éventuellement un intervalle compact de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) et (f_n) une suite de fonctions croissantes sur I . Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue f alors cette convergence est uniforme.*

Application 43. Soit (F_n) une suite de fonctions de répartitions continues convergeant simplement sur \mathbb{R} vers une fonction de répartition F . Alors cette convergence est uniforme.

Théorème 44 (de Stone-Weierstraß). *Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit encore $\mathcal{A} \subset C(X)$ une sous-algèbre telle que :*

1. La sous-algèbre \mathcal{A} sépare les points :

$$\forall x \neq y, \exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq f(y). \quad (13)$$

2. De plus,

$$\forall x \in X, \exists f \in \mathcal{A} \quad f(x) \neq 0. \quad (14)$$

Alors la sous-algèbre \mathcal{A} est dense dans $C(X)$.

Remarque 45. La démonstration de tels énoncés utilisent lourdement le fait que tout espace topologique compact est *séparable*, c'est à dire admettant une partie dénombrable dense.

2.5 Compacité dans les espaces de fonctions

L'outil principal de cette partie est le procédé d'extraction diagonale que nous avons mentionné à la proposition 11. Ceci permet de trouver des parties compactes dans les espaces $l^p(\mathbb{N})$ ou dans les espaces $C(X)$, où X est un espace métrique compact. La détermination de parties compactes de $C(X)$ est particulièrement importante puisque c'est elle qui permet de faire la même étude dans des espaces *a priori* très différents comme les espaces $L^p(\mathbb{R})$ ou des espaces de fonctions holomorphes. Cette généralisation s'opère en établissant des liens entre les topologies des espaces considérés et celle de $C(X)$. Par exemple, la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est semi-équivalente à la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ sur les parties compactes $K \subset \mathbb{R}$:

$$\forall f \in C(K), \quad \|f\|_{L^p(K)} \leq \text{mesure}(K)^{1/p} \|f\|_{L^\infty(K)}. \quad (15)$$

Mais donnons sans plus tarder ces théorèmes !

Théorème 46. *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $A \subset l^p(\mathbb{N})$ telle que :*

1. *La partie A est bornée dans $l^p(\mathbb{N})$ (pour la norme usuelle $\|\cdot\|_{l^p}$),*
2. *La partie A est uniformément sommable :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 0 \forall u \in A, \quad \sum_{n \geq N} |u(n)|^p \leq \epsilon. \quad (16)$$

Alors l'adhérence $\text{Adh}_{l^p}(A)$ est une partie compacte de $l^p(\mathbb{N})$ (on dit que A est relativement compacte).

Théorème 47 (d'Ascoli). *Soit (X, d) un espace métrique compact et $A \subset C(X)$ telle que :*

1. *La partie A est bornée dans $C(X)$ (pour la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$),*
2. *La partie A est équicontinue :*

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall y \in X, \forall f \in A, \quad d(x, y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon. \quad (17)$$

Alors A est une partie relativement compacte de $C(X)$.

Application 48 (Théorème de Cauchy-Peano). Soit $d \geq 1$ et $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application continue. Alors, pour $y_0 \in D$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (18)$$

admet une solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Cette solution n'est pas unique *a priori*.

Application 49 (Théorème de Rellich – cas de la dimension 1). Soit $1 \leq p < +\infty$ et A une partie bornée de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(0,1)$. Alors $A \subset L^p(0,1)$ et $\text{Adh}_{L^p}(A)$ est une partie compacte de $L^p(0,1)$.

Théorème 50 (de Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $A \subset L^p(\mathbb{R})$ telle que :*

1. *La partie A est bornée dans $L^p(\mathbb{R})$,*

2. La partie A est uniformément intégrable :

$$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0 | \forall f \in A, \int_{|x| \geq R} |f(x)|^p dx \leq \epsilon, \quad (19)$$

3. On a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | \forall f \in A, \forall |h| \leq \delta, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|^p dx \leq \epsilon. \quad (20)$$

Alors A est une partie relativement compacte de $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème 51 (de Montel). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω telles que pour chaque compact K de Ω on ait

$$\exists M > 0 | \forall z \in K, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M. \quad (21)$$

Alors il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})_n$ qui converge uniformément sur chaque compact de Ω vers une fonction holomorphe.

Remarque 52. Le théorème précédent n'est pas explicitement un théorème de compacité puisque nous n'avons rien dit sur la topologie de l'espace vectoriel $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω . Il est possible de le munir d'une métrique qui le rende complet : si (K_n) est une suite d'exhaustion de compacts³ de Ω , c'est à dire que $\Omega = \bigcup_n K_n$ et $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ alors on pose

$$\forall f, g \in \mathcal{H}(\Omega), \quad d(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min \{1, \|f - g\|_{L^\infty(K_j)}\}. \quad (22)$$

2.6 Opérateurs compacts

Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach sur \mathbb{C} dont on note B_E la boule unité. L'objet de cette partie est de mener l'étude spectrale d'une famille particulière d'opérateurs continus sur E , les opérateurs compacts.

Définition 53. On note $\mathcal{L}(E)$ la \mathbb{C} -algèbre des opérateurs continus $E \rightarrow E$ (muni de la norme subordonnée à $\|\cdot\|$, ce qui en fait une algèbre de Banach) et I son unité. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. On dit que λ est valeur *propre* de T et on note $\lambda \in \text{vp}(T)$ si l'opérateur $\lambda I - T$ n'est pas injectif.
2. On dit que λ est valeur *spectrale* de T et on note $\lambda \in \sigma(T)$ si l'opérateur $\lambda I - T$ n'est pas inversible, c'est à dire qu'il ne possède pas d'inverse dans $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 54. Comme E est un espace de Banach, il ressort du théorème d'inversion de Banach que l'opérateur $\lambda I - T$ est non inversible si et seulement si il n'est pas bijectif. C'est principalement pour cette raison que l'hypothèse de complétude est nécessaire à ce qui suit.

Exemple 55. On considère les opérateurs $l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ suivants :

3. Une telle suite peut être donnée explicitement : on prend $K_n = \{z \in \Omega | |z| \leq n, d(z, \partial\Omega) \geq 1/n\}$.

1. L'opérateur de translation à droite $S : (u_0, u_1, \dots) \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$,
2. L'opérateur de translation à gauche $T : (u_0, u_1, \dots) \mapsto (u_1, u_2, \dots)$.

Alors les valeurs spectrales de ces opérateurs sont les nombres complexes de modules inférieurs (ou égaux) à l'unité $\sigma(T) = \sigma(S) = \bar{\mathbb{D}}$, tandis que les valeurs propres de ces opérateurs sont $\text{vp}(T) = \mathbb{D}$ et $\text{vp}(S) = \emptyset$.

Définition 56. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E)$ est dit *compact* si l'image $T(B_E)$ de la boule unité est relativement compacte dans E . On note alors $T \in \mathcal{K}(E)$.

Exemple 57. Tout opérateur de rang fini est compact.

Proposition 58. L'ensemble $\mathcal{K}(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E)$. En particulier, toute limite dans $\mathcal{L}(E)$ d'opérateurs de rangs finis est compacte.

Proposition 59. Supposons que $E = H$ soit un espace de Hilbert. Alors tout opérateur compact sur H est limite d'opérateurs de rangs finis.

Exemple 60. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Alors l'opérateur $T_K : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ défini par

$$\forall f \in L^2(0, 1), \quad T_K f(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy \quad (23)$$

est compact. En fait, l'image de la boule unité de $L^2(0, 1)$ par T_K est une partie équicontinue de $C[0, 1]$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'Ascoli.

Théorème 61 (Alternative de Fredholm). Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact. Alors

1. On a $\dim \ker(I - T) < +\infty$,
2. Le sous espace $\text{Im}(I - T)$ est fermé dans E ,
3. L'opérateur $I - T$ est injectif si et seulement si il est inversible.

Corollaire 62. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors,

1. $\dim \ker(\lambda I - T) < +\infty$,
2. $\lambda \in \text{vp}(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$.

Théorème 63. Supposons que E soit de dimension infinie et considérons $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors, 0 est le seul point d'accumulation de $\sigma(T)$, s'il y en a un.

Dans ce qui suit, nous supposons que $E = H$ est un espace de Hilbert séparable. Nous noterons $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit hermitien sur H , que nous supposerons linéaire à droite et semi-linéaire à gauche⁴. La structure hilbertienne de H permet d'étudier une classe encore plus particulière d'opérateurs compacts : les opérateurs compacts *autoadjoints*. Ceux-ci jouent un rôle majeur en Physique, notamment en mécanique quantique, où abondent les opérateurs différentiels autoadjoints de résolvantes compactes...

⁴. Nous adoptons cette convention par souci de cohérence avec les notations employées en mécanique quantique, où les vecteurs sont notés $|\psi\rangle$ et les formes linéaires $\langle\phi|$.

Définition 64. Si $T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un unique opérateur $T^* : E \rightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx|y \rangle = \langle x|T^*y \rangle. \quad (24)$$

De plus $T^* \in \mathcal{L}(H)$. Cet opérateur est nommé *opérateur adjoint* de T et si $T = T^*$ on dit que T est *autoadjoint*.

Exemple 65. Reprenons les notations de l'Exemple 60. Alors l'opérateur adjoint de T_K est l'opérateur $T_{\tilde{K}}$ où $\tilde{K}(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Théorème 66. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjoint compact. Alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et H admet une base hilbertienne de vecteurs propres de T .

Exemple 67. Soit $f \in L^2(0, 1)$. On note Tf l'unique solution dans l'espace de Sobolev $H^1(0, 1)$ de

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

où $p \in C^1[0, 1]$ vérifie $p > \alpha_0 > 0$ et $q \in C^0[0, 1]$ vérifie $q \geq 0$. Alors la corestriction $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ est autoadjointe compacte.

Terminons en disant quelques mots sur les applications de ce dernier exemple.

Le Théorème 66 appliqué à l'exemple précédent permet de donner une caractérisation variationnelle du spectre de l'opérateur différentiel $D : u \mapsto -(pu')' + qu$ sous la forme du principe du min-max. Plus précisément, si $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow +\infty$ sont les valeurs propres (comptées avec multiplicités) données par le théorème (les inverses de celles de T) alors

$$\lambda_k = \min_{\dim E=k} \max_{u \in E - \{0\}} \left(\int_0^1 [p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2] dx \right) \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx \right)^{-1}, \quad (26)$$

où le minimum est pris sur tous les sous-espaces E de dimension k de $H_0^1(0, 1)$ et est atteint pour $E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$, les u_j étant les vecteurs propres associés aux λ_j . Cette relation permet une étude qualitative des valeurs propres et l'obtention de relations du type $\lambda_1 \leq \|q\|_{L^1}$ (par exemple!).

Et les choses deviennent encore plus intéressantes lorsque l'on s'aventure en dimension $d \geq 2$ pour s'intéresser à des problèmes spectraux sur des ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, comme le spectre de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta f = \lambda f & \text{dans } \Omega \\ f = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (27)$$

Les valeurs propres $\lambda_k(\Omega)$ de l'opérateur dépendent alors très fortement de la *géométrie* de Ω , ainsi que du type des conditions au bord associées à l'opérateur (Dirichlet, Neumann, Robin, Steklov, mixtes, etc.), et le domaine de la théorie spectrale géométrique regorge encore aujourd'hui de nombreuses questions sans réponse (voir [4] par exemple).

3 Développements

3.1 Alternative de Fredholm

Le contenu de cette section provient du Chapitre 6 de [2].

Dans tout ce qui suit E est un espace de Banach dont on note $\| \cdot \|$ la norme. Nous commençons par rappeler un lemme apparaissant dans la leçon mais utilisé dans le développement.

Lemme 68 (de Riesz). *Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé strict. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, il est possible de fixer $u \in E$ de norme unitaire $\|u\| = 1$ tel que $d(u, F) \geq 1 - \epsilon$.*

Démonstration. Bien sûr, on peut supposer $1 - \epsilon > 0$ et $F \neq \{0\}$. Soit $v \in E$ avec $v \notin F$. Alors, puisque F est fermé, $d(v, F) > 0$. Soit $f_0 \in F$ tel que

$$d(v, F) \leq \|v - f_0\| \leq \frac{d(v, F)}{1 - \epsilon}. \quad (28)$$

Alors le vecteur de norme unitaire

$$u = \frac{v - f_0}{\|v - f_0\|} \quad (29)$$

vérifie, pour $f \in F$,

$$\|u - f\| = \left\| \frac{v - f_0}{\|v - f_0\|} - f \right\| = \frac{1}{\|v - f_0\|} \|v - (f_0 + \|v - f_0\|f)\| \quad (30)$$

$$\geq \frac{d(v, F)}{\|v - f_0\|} \geq 1 - \epsilon. \quad (31)$$

Ceci conclut la preuve. \square

Remarque 69. Le théorème de Riesz, qui assure qu'un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte, est une conséquence directe de ce lemme.

Théorème 70 (Alternative de Fredholm). *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur compact. Alors*

1. On a $\dim \ker(I - T) < +\infty$,
2. Le sous-espace $\text{Im}(I - T)$ est fermé dans E ,
3. L'opérateur $I - T$ est injectif si et seulement si il est inversible.

Remarque 71. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Le premier point affirme que le sous-espace propre associé à λ est de dimension finie (éventuellement nulle). Le troisième point affirme que λ est une valeur spectrale de T si et seulement si c'est une valeur propre.

Démonstration. Montrons le premier point. Notons $F = \ker(I - T)$. C'est le sous-espace des points fixes de l'opérateur T . Alors, si B_F est la boule unité fermée de F et B_E celle de E , on a $B_F \subset T(B_E)$ ce qui implique que B_F est une partie compacte de E , donc de F . Le théorème de Riesz assure que F est

nécessairement de dimension finie.

Montrons le deuxième point à l'aide de la caractérisation séquentielle de la fermeture. Munissons nous d'une suite de points $y_n \in \text{Im}(I - T)$ qui convergent dans E vers une limite y et montrons que $y \in \text{Im}(I - T)$.

Pour chaque $n \geq 0$, on peut fixer $x_n \in E$ avec $y_n = x_n - Tx_n$. Ensuite, comme $\ker(I - T)$ est de dimension finie, il existe un $u_n \in \ker(I - T)$ tel que

$$d(x_n, \ker(I - T)) = \|x_n - u_n\|. \quad (32)$$

Alors, comme $Tu_n = u_n$, on a

$$y_n = (x_n - u_n) - T(x_n - u_n). \quad (33)$$

Distinguons deux cas.

1. Supposons que $\|x_n - u_n\|$ reste borné. Alors, puisque T est compact, quitte à extraire, on peut supposer la suite $T(x_n - u_n)$ convergente de limite $w \in E$. Comme $y_n \rightarrow y$, la relation (33) implique que

$$x_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y + w := l, \quad (34)$$

et, par continuité de T , on a $T(x_n - u_n) \rightarrow Tl$. Comme par ailleurs $T(x_n - u_n) \rightarrow w$, l'unicité de la limite fournit $Tl = w$, et donc $y = l - w = l - Tl$, d'où le résultat.

2. Supposons maintenant que $\|x_n - u_n\|$ ne soit pas borné. Quitte à extraire, on peut supposer $\|x_n - u_n\| \rightarrow +\infty$. Posons

$$w_n := \frac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}. \quad (35)$$

Comme les w_n sont de normes unitaires, quitte à extraire, on peut supposer la suite Tw_n convergente de limite $z \in E$. La suite (y_n) est convergente donc bornée. Ceci implique que

$$w_n - Tw_n = \frac{y_n}{\|x_n - u_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (36)$$

et donc $w_n \rightarrow z$. L'élément z satisfait donc $z = Tz$ et $z \in \ker(I - T)$. Il en découle

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z \in \ker(I - T) \quad (37)$$

et, en particulier, $d(w_n, \ker(I - T)) \rightarrow 0$. Or, comme $u_n \in \ker(I - T)$,

$$d(w_n, \ker(I - T)) = d\left(\frac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}, \ker(I - T)\right) \quad (38)$$

$$= d\left(\frac{x_n}{\|x_n - u_n\|}, \ker(I - T)\right) \quad (39)$$

$$= \frac{d(x_n, \ker(I - T))}{\|x_n - u_n\|} = 1, \quad (40)$$

ce qui est absurde.

Le deuxième cas ne peut être vérifié, ce qui implique que le premier cas l'est automatiquement et conclut la preuve du deuxième point.

Montrons le troisième point. Tout d'abord, si $I - T$ est inversible alors il est nécessairement injectif. Supposons que $I - T$ est injectif et supposons qu'il n'est pas surjectif⁵ en vue d'obtenir une contradiction.

Posons $E_1 = \text{Im}(I - T)$. C'est un sous espace fermé strict de E stable par T . On peut considérer la restriction $T_1 = T|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$. Montrons que T_1 vérifie les mêmes propriétés que T .

1. L'espace E_1 est fermé dans l'espace de Banach E , donc est aussi un espace de Banach.
2. L'opérateur T_1 est la restriction de l'opérateur compact T . C'est donc aussi un opérateur compact.
3. L'opérateur T_1 n'est pas surjectif. En effet, si $E_2 = \text{Im}(I - T_1) = (I - T)^2(E)$, l'injectivité de $I - T$ fournit $E_2 \subsetneq E_1$.

En raisonnant par récurrence, on construit ainsi une suite de sous-espaces fermés

$$\cdots \subsetneq E_{n+1} \subsetneq E_n \subsetneq \cdots \subsetneq E_2 \subsetneq E_1 \subsetneq E. \quad (41)$$

Le lemme de Riesz permet alors de fixer, pour chaque $n \geq 1$, un élément $u_n \in E_n$ tel que $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Montrons que la suite Tu_n ne peut avoir de suite extraite convergente, ce qui fournira la contradiction convoitée. Pour $p > q$, on a :

$$Tu_p - Tu_q = \underbrace{-(u_p - Tu_p)}_{\in E_{p+1}} + \underbrace{(u_q - Tu_q)}_{\in E_{q+1}} + \underbrace{u_p}_{\in E_{p+1}} - u_q. \quad (42)$$

Comme $E_{p+1} \subset E_p \subset E_{q+1}$, cela permet d'écrire $Tu_p - Tu_q = w_{pq} - u_q$ avec $w_{pq} \in E_{q+1}$. Par construction de u_q , on a alors

$$\|Tu_p - Tu_q\| = \|w_{pq} - u_q\| \geq 1/2, \quad (43)$$

ce qui interdit l'existence d'une suite extraite convergente. \square

3.2 Théorème du point fixe de Brouwer dans le plan

Le contenu de cette section provient de la Section 6 du Chapitre 25 de [1].

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 72 (du point fixe de Brouwer). *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le disque unité fermé et $f : D \rightarrow D$ une application continue. Alors f admet un point fixe.*

Remarque 73. Tout compact convexe du plan est homéomorphe au disque unité. Le résultat s'étend donc aux fonctions continues définies sur de tels compacts.

La preuve de ce théorème repose sur un résultat de théorie des graphes, le lemme de Sperner. C'est lui qui permet de trouver une suite de points ayant comme valeur d'adhérence un point fixe de f , valeur d'adhérence dont l'existence est garantie par la compacité de D .

⁵. Le théorème d'inversion de Banach assure que, puisque $I - T$ est injectif, il est non inversible si et seulement si non surjectif.

Démonstration. Tout d'abord, le disque unité fermé est homéomorphe au triangle Δ de \mathbb{R}^3 bâti sur les vecteurs de la base canonique $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. Nous pouvons donc nous ramener au cas $f : \Delta \rightarrow \Delta$.

Avant d'énoncer le lemme de Sperner, disons quelques mots sur la notion de triangulation.

Définition 74. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangle fermé du plan.

1. On nomme *triangulation* de T un ensemble fini de triangles fermés plans d'intérieurs non vides et disjoints $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, dont l'union est exactement T et tel que chaque coté d'un T_k est partagé par au plus deux triangles de \mathcal{T} (dont T_k). En particulier, un triangle peut partager ses sommets avec plusieurs triangles, mais ne partage ses cotés qu'avec au plus trois autres triangles de la triangulation.
2. Les *sommets* V de la triangulation sont les sommets des triangles T_k et les *arêtes* E de la triangulation sont les arêtes de ces triangles, définissant ainsi un graphe (V, E) .
3. Enfin, on note $\delta(\mathcal{T})$ la longueur de l'arête la plus longue de la triangulation.

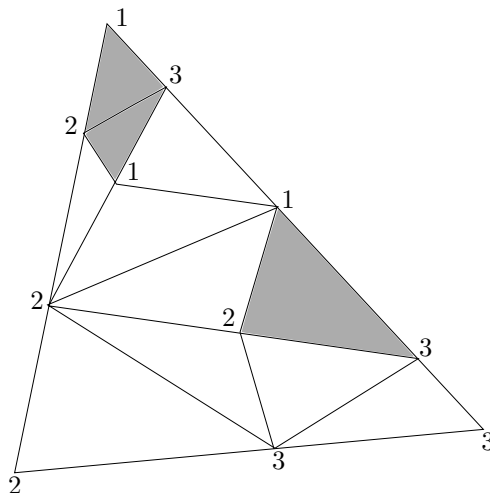


FIGURE 1 – Une coloration vérifiant le lemme de Sperner. Les triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes sont grisés.

Lemme 75 (de Sperner). Soit T un triangle fermé du plan bâti sur les sommets V_1, V_2 et V_3 et soit \mathcal{T} une triangulation de T . Munissons chaque sommet d'une "couleur" choisie⁶ dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ telle que (la figure 1 fournit un exemple d'une telle triangulation)

1. chaque V_i prend la couleur i , pour $1 \leq i \leq 3$,
2. pour $1 \leq i \neq j \leq 3$ et pour chaque sommet V élément du segment $[V_i, V_j]$, la couleur du sommet V est soit i soit j .

⁶ Plus précisément, on se donne une application $: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

Alors il existe un triangle $T' \in \mathcal{T}$ dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes.

Preuve du lemme. Nous allons montrer qu'en fait le nombre de triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes est *impair* (donc non nul).

Considérons le nouveau graphe $G = (V', E')$ suivant :

1. Les sommets de G sont $V = \{T_1, \dots, T_n\} \cup \{\mathbb{R}^2 - T\}$. Chaque face de la triangulation est une sommet de G , ainsi que la face "à l'extérieur" $\mathbb{R}^2 - T$.
2. Deux sommets de G sont reliés par une arête si et seulement si leur intersection est une arête de la triangulation dont les sommets portent les couleurs distinctes 1 et 2.

Le graphe G est représenté par la figure 2.

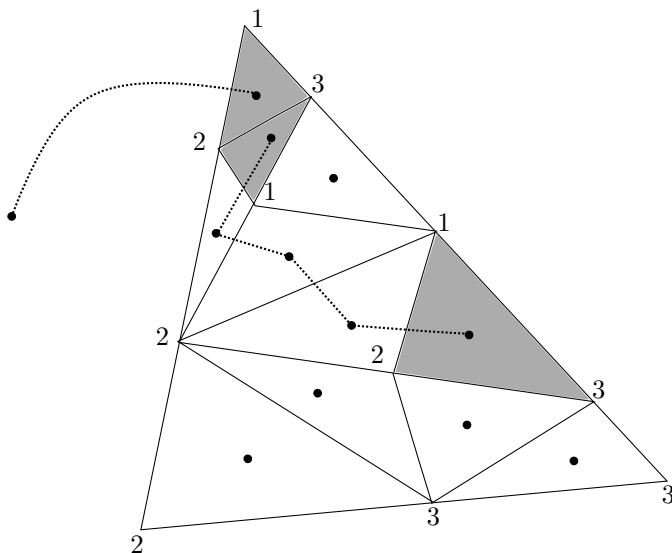


FIGURE 2 – Représentation du graphe G .

Aucun sommet intérieur de G (c'est à dire différent de $\mathbb{R}^2 - T$) ne peut être de degré⁷ 3 et les seuls sommets intérieurs de degré 1 sont les triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes. Il s'ensuit que les seuls sommets intérieurs de degré impair sont les triangles tricolores.

Cependant, le sommet "extérieur" $\mathbb{R}^2 - T$ de G est nécessairement de degré impair. En effet, il ne peut y avoir qu'un nombre impair de changements entre 1 et 2 le long de l'arête $[V_1, V_2]$ du triangle T .

⁷ Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes le reliant à d'autres sommets. Rappelons que, comme chaque triangle $T \in \mathcal{T}$ partage ses cotés avec au plus trois autres triangles, les degrés des sommets de G sont majorés par 3.

Enfin, le nombre total de sommets de G de degrés impairs est nécessairement lui-même pair puisque,

$$2|E'| = \sum_{v \in V'} \deg(v). \quad (44)$$

(Cette relation traduit simplement le fait qu'une arête lie deux sommets.) Le nombre de triangles tricolores est donc nécessairement impair. \square

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème de Brouwer. Nous voyons le triangle $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ comme faisant partie du plan, isométrique à \mathbb{R}^2 , qu'il engendre.

On considère une suite $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \dots$ de triangulations de Δ telle que, pour $k \geq 1$, la triangulation \mathcal{T}_{k+1} est la triangulation barycentrique de \mathcal{T}_k (voir la figure 3). Alors $\delta(\mathcal{T}_k) \rightarrow 0$.

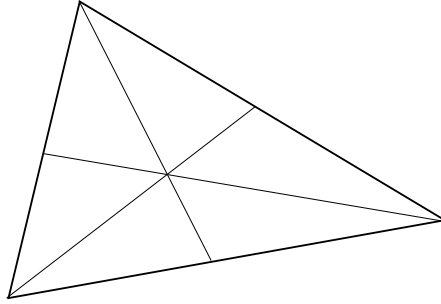


FIGURE 3 – La triangulation barycentrique d'un triangle.

Si l'une des arêtes de la triangulation \mathcal{T}_k est un point fixe de f , la preuve est terminée. Dans le cas contraire, pour chaque $k \geq 1$, nous définissons la coloration suivante : si v est un arête de la triangulation \mathcal{T}_k , on pose :

$$\lambda(v) = \min\{i, \quad f_i(v) < v_i\}, \quad (45)$$

où $f_i(v)$ et v_i sont les i -ièmes coordonnées des vecteurs $f(v)$ et v . Le nombre $\lambda(v)$ est le plus petit indice i pour lequel la i -ième coordonnée de $f(v) - v$ est strictement négative. Assurons nous que cette coloration est bien définie.

Tout d'abord, par choix de $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, chaque $x \in \Delta$ vérifie $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ et donc $\sum_i (f_i(v) - v_i) = 0$. Comme nous avons supposé qu'aucune des arêtes de la triangulation \mathcal{T}_k est un point fixe, cela implique que l'une au moins des coordonnées $f_i(v) - v_i$ est strictement positive tandis qu'une autre au moins est strictement négative. La coloration λ est donc bien définie.

Vérifions que la coloration λ satisfait les hypothèses du lemme de Sperner. Tout d'abord, le sommet e_i de Δ prend nécessairement la couleur i puisque i est la seule coordonnée négative de $f(e_i) - e_i$. De plus, si v est une arête de la triangulation qui se trouve sur le côté de Δ opposé à e_i , alors $v_i = 0$ et donc $\lambda(v) \neq i$.

Le lemme de Sperner assure que, pour chaque $k \geq 1$, il existe un triangle $T_k \in \mathcal{T}_k$ “tricolore” dont les sommets a, b, c vérifient

$$\lambda(a_k) = 1, \quad \lambda(b_k) = 2, \quad \lambda(c_k) = 3. \quad (46)$$

C'est ici qu'intervient de façon cruciale la notion de compacité. Puisque Δ est compact, la suite (a_k) de points admet une suite extraite convergente. Quitte à extraire, nous pouvons la supposer convergente de limite $z \in \Delta$. Montrons que z est un point fixe de f .

Comme $\delta(\mathcal{T}_k) \rightarrow 0$, on a aussi $b_k \rightarrow z$ et $c_k \rightarrow z$. De plus, comme $\lambda(a_k) = 1$, on a $f_1(a_k) < a_{k,i}$. La continuité de f fournit alors $f_1(z) \leq z_1$. On montre de la même manière que $f_2(z) \leq z_2$ et $f_3(z) \leq z_3$. Alors, la relation $\sum_i (f_i(z) - z_i) = 0$ force $f_i(z) = z_i$ et donc $f(z) = z$. \square

Références

- [1] M. Aigner et G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 4^e édition, Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 5^e tirage, Masson, Paris, 1983.
- [3] D. Choimet et H. Queffélec, *Analyse mathématique, grands théorèmes du vingtième siècle*, Tableau Noir 104, Calvage et Mounet, Paris, 2009.
- [4] A. Girouard et I. Polterovich, Spectral Geometry of the Steklov Problem, *Journal of Spectral Theory*, 7(2) : 321-359, 2017. Aussi sur arXiv :1411.6567.
- [5] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach : Analyse et probabilités*, Cours spécialisés de la SMF 12, 2004.
- [6] H. Queffélec, *Topologie, cours et exercices corrigés*, 4^e édition, Dunod, Paris, 2012.
- [7] C. de Séguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*, Mathématiques en devenir, Calvage et Mounet, Paris, 2011.
- [8] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Volume I & II Combined*, 3^eme édition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2002.