Alle Aufgaben zu Analysis I

WS 2002/2003 Blatt 1 17.10.2002

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 1.1 Rationale Zahlen und Ungleichungen

Zeigen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

(Tip: Um zu zeigen, daß $x \leq y$ gilt, ist es oft einfacher zu zeigen, daß $0 \leq y - x$ gilt. Das ist so, weil man zeigen kann, daß eine Zahl $0 \leq z$ erfüllt, indem man eine Zahl $w \in \mathbb{R}$ vorgibt, so daß $z = w^2$ gilt.)

Aufgabe 1.2 Beispiele zu "viel kleiner"

Bestimmen Sie eine Zahl r so daß für $0 < |x| < r$ gilt: x^2 ist höchstens 3% von $|x|$. Wieviel Prozent von $|x|$ ist $|x|^3$ höchstens, und wieviel Prozent von $|x|^2$ ist $|x|^4$ höchstens (unter derselben Voraussetzung $0 < |x| < r$)? – Geben Sie zu jeder Prozentzahl p eine Zahl $r(p)$ an, so daß aus $0 < |x| < r(p)$ folgt: x^2 ist höchstens p% von $|x|$.

Aufgabe 1.3 Parabeltangenten

Geben Sie die Gleichung der Parabel an, die den Einheitskreis in dem Punkt (a, b) mit $a^2 + b^2 = 1,\ 0 \leq a < 1, b \neq 0$ von innen berührt und durch $(1, 0)$ geht.

Mit anderen Worten, zu jedem Kreispunkt (a, b), in dem die Tangente nicht parallel zur y-Achse ist, gibt es eine Parabel, so daß der Kreis in dem Interval $[a-l, a+l]$ mit $l := 1 - |a|$ zwischen Parabel und Parabeltangente liegt. Beweisen Sie diese Aussage.

(Tip: Sie können ohne Beweis verwenden, daß die Steigung der Normalparabel an der Stelle x_0 gerade $2x_0$ ist. Außerdem wissen Sie, daß die Tangente eines Kreises an einem Punkt senkrecht auf der Verbindungsgerade des Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises steht. Vergessen Sie nicht, die Rechnungen mittels der Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ zu vereinfachen.)

Aufgabe 1.4 Beispiel einer abzählbaren Menge

Wir versehen die Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Die Menge aller achsenparallelen Rechtecke in der Ebene mit rationalem Mittelpunkt und rationalen Kantenlängen ist abzählbar.

Dazu erklären wir nochmal, was wir unter Abzählbarkeit verstehen. Technisch gesprochen meinen wir damit, daß wir eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen und der Menge aller solcher Rechtecke angeben können. Die genaue Definition dieses Begriffs, Bijektion, erfolgt später, hier bedeutet er einfach, daß wir jedem dieser Rechtecke genau eine natürliche Zahl zuordnen können.

Was sollen Sie also tun? Überlegen Sie sich zuerst, wieviele Parameter ein achsenparalleles Rechteck eindeutig bestimmen. (Entscheiden Sie selbst, ob Sie Hoch- und Querformat getrennt zählen oder nicht.) Nehmen Sie dann irgendeine Abzählung der rationalen Zahlen. Die Existenz einer Abzählung wurde in der Vorlesung bewiesen. Beschreiben Sie dann ein Verfahren, wie Sie jeder natürlichen Zahl ein Tupel von Parametern zuordnen. Machen Sie sich klar, daß Sie alle möglichen Tupel erwischen.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 2.1 Polynomfaktorisierungen

(a): Beweisen Sie mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Q}$:

$$X^n - a^n = (X-a)\sum_{k=0}^{n-1} X^{n-k-1}a^k, \qquad \Big(\text{Definiere: } \sum_{k=0}^{n+1} b_k := (\sum_{k=0}^{n} b_k) + b_{n+1}.\Big)$$

(b): Folgern Sie aus Teil (a), daß sich für jedes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ und für jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein $Q_a \in \mathbb{Q}[X]$ finden läßt, so daß gilt:

$$P(X) - P(a) = (X-a)Q_a(X)$$

Aufgabe 2.2 Kreise und der Graph von $x \mapsto x^4$

(a) Betrachten Sie den Graphen von $x \mapsto x^4$. Bestimme den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt. Zeigen Sie, daß für $x \leq 1$ die Punkte des Graphen **innerhalb** dieses Kreises liegen.

(b) Bestimmen Sie ebenso den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(2, 16)$ berührt. Zeigen Sie, daß der Graph von $x \mapsto x^4$ **außerhalb** dieses Kreises liegt.

(c) Können Sie einen Kreis finden, der den Graph im Punkte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt, aber so, daß der Graph **außerhalb** des Kreises verläuft?

Aufgabe 2.3 Polynomdivision

(a) Zeige, daß es **kein** $P \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, mit

$$X^5 + 3X^2 + 7 = (X-1)P(X).$$

(b) Zeige, daß es **kein** $Q \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, mit

$$X^6 - X^5 + 3X^3 - 3X^2 + 7X - 7 = (X-1)^2 Q(X).$$

(c) Rechne $R \in \mathbb{Q}[X]$ aus, so daß

$$X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2)R(X).$$

Aufgabe 2.4 Ungleichungen für rationale Zahlen

Eine rationale Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (a, b) von ganzen Zahlen mit $b \neq 0$, wobei zwei Paare (a, b) und (c, d) äquivalent sind, wenn $ad = bc$ erfüllt ist. Wir nennen das Paar (a, b) einen Repräsentanten der Zahl. Eine ganze Zahl n fassen wir als rationale Zahl auf, indem wir sie mit der Äquivalenzklasse des Repräsentanten $(n, 1)$ identifizieren.

(a) Geben Sie alle Repräsentanten einer rationalen Zahl an.

Wir schreiben ab sofort die Äquivalenzklasse eines Paares (a, b) mit $b \neq 0$ als $\frac{a}{b}$.

Das Problem bei Arbeiten mit Äquivalenzklassen ist, daß wir oft Dinge mit Hilfe der Repräsentanten definieren, aber a priori nicht sicher sein können, daß für jeden einzelnen Repräsentanten der Äquivalenzklasse auch dasselbe geschieht. Ziel dieser Aufgabe ist, Rechenregeln für Ungleichungen mit **rationalen Zahlen** auf die Rechenregeln für Ungleichungen mit **ganzen Zahlen** zurückzuführen. Dazu definieren wir zuerst, wann eine rationale Zahl positiv ist:

Die rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ist positiv, in Zeichen $0 < \frac{a}{b}$, wenn $0 < a \cdot b$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß dies für alle Repräsenten gilt, wenn es für einen einzigen gilt. Machen Sie sich klar, daß für ganze Zahlen diese Definition mit dem übereinstimmt, was Sie für ganze Zahlen kennen.

Dies dient gerade dazu, klarzustellen, daß die soeben gegebene Definition unabhängig von der Auswahl eines Repräsentanten ist und konsistent mit alten Definitionen.

Auch Addition und Multiplikation rationaler Zahlen sind repräsentantenweise definiert, wir setzen aber voraus, daß wir gezeigt haben, daß diese unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Setzen Sie folgende Behauptungen für ganze Zahlen voraus und zeigen Sie:

(d) Wenn p, q positive rationale Zahlen sind, so auch $p + q$ und $p \cdot q$.

Unser Ziel ist es, die Anordnung der ganzen Zahlen auf die rationalen Zahlen zu übertragen. Dies geschieht durch den Trick, zuerst zu definieren, was eine positive Zahl sein soll, und erst dann mittels der Differenz die Anordnung zu erklären.

Für $p, q \in \mathbb{Q}$ definieren wir $p < q \in \mathbb{Q}$, genau dann wenn $q - p$ positiv ist (oder in Zeichen: wenn $0 < q - p$ gilt).

Dies ist eine strikt axiomatische Vorgehensweise. Wir können dies in jedem Ring bzw. Körper tun, wenn wir eine Teilmenge aussondern können, die Aussage (d) erfüllt. Jetzt endlich können wir die gewünschten Ungleichungen beweisen.

(e) Zeigen Sie, daß für $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$ und $p < q < r$ die Ungleichungen

$$p < r \text{ und } p + s < q + s,$$

gelten und, falls zusätzlich $0 < s$ gilt, so auch

$$p \cdot s < q \cdot s.$$

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 3.1 Eindeutigkeit der Ableitung bei gröberen Fehlern

In der Vorlesung wird (wie auch im Manuskript) die Eindeutigkeit der Ableitung aus der Definition mit quadratischen Fehlern gefolgert.
Wir erlauben jetzt gröbere Abweichung von der Tangente: Für ein gegebenes a betrachten wir die Menge aller Funktionen h für die ein $c > 0$ (wahrscheinlich klein), ein $K > 0$ (vielleicht groß) und eine Zahl $h'(a)$ existieren, so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$

$$|h(x) - (h(a) + h'(a)(x-a))| \leq K|x-a|^{3/2}$$

gilt.
Zeigen Sie, daß auch aus dieser gröberen Eigenschaft folgt, daß $h'(a)$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3.2 Parabel und Kreise

Betrachten Sie an einer Stelle $a \neq 0$ die Parabel $P(x) = x^2$ und bestimmen Sie zu jedem a (durch Wahl von x_m, y_m, r) den Halbkreis

$$h(x) = y_m - \sqrt{(r^2 - (x-x_m)^2)},$$

der $h(a) = P(a)$, $h'(a) = P'(a)$, $h''(a) = P''(a)$ erfüllt. Dieser Halbkreis berührt also die Parabel. Zeigen Sie, daß für $a \neq 0$ der Kreis die Parabel durchquert, d.h. daß $P - h$ bei a das Vorzeichen wechselt. Setzen Sie dazu die Parabelpunkte (x, x^2) in die Kreisgleichung ein und klammern Sie möglichst viele Faktoren $(x-a)$ aus. Was passiert bei $a = 0$? – Natürlich dürfen Sie hier die Differentiationsregeln und $\sqrt{}\,' = 0.5/\sqrt{}$ verwenden.
Gibt es einen quantitativen Grund zu sagen, "diese Kreise berühren die Parabel *besser* als die Parabeltangenten die Parabel berühren"? (Bild hierzu auf der Rückseite.)

Aufgabe 3.3 Binomialkoeffizienten und Induktion

Wiederholen Sie "durch Zählen auf zwei verschiedene Weisen" die Begründung aus der Vorlesung für die beiden Rekursionsformeln

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \qquad \text{und} \qquad \binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k)$$

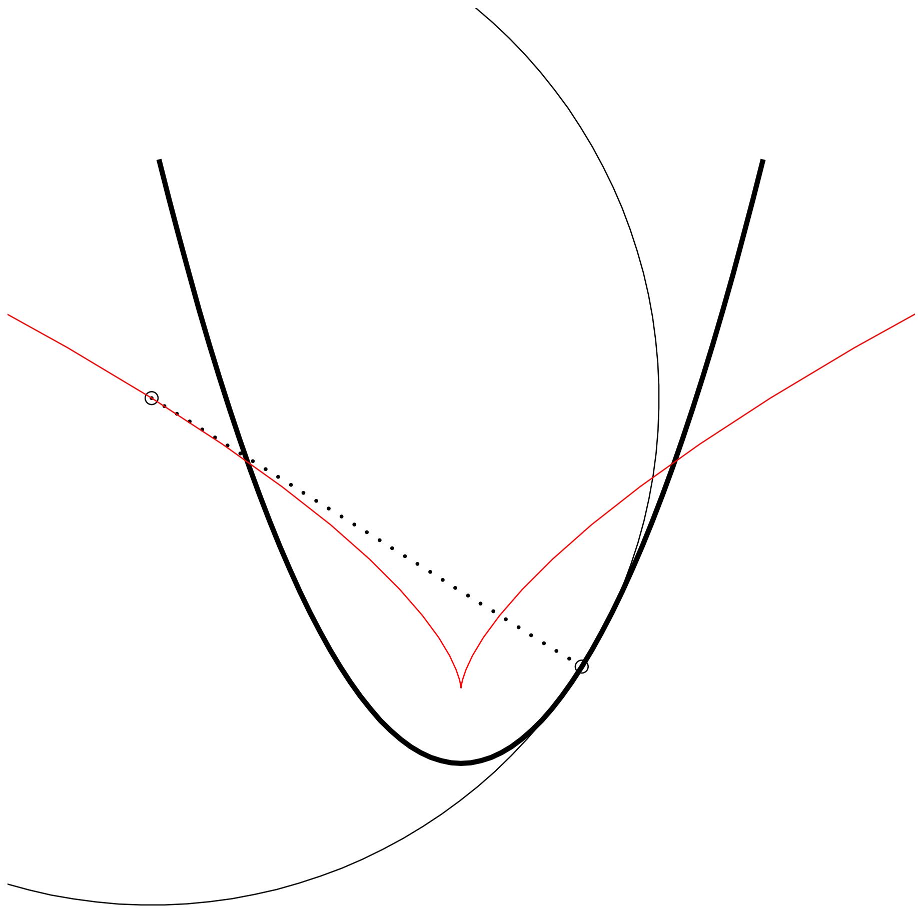
mit den Anfangswerten $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$. Wir definieren $n!$ (sprich n Fakultät) induktiv durch $0! := 1$ und $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$. Geben Sie mit jeder der beiden Rekursionsformeln einen Induktionsbeweis für

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\ , 0 \leq k \leq n\ .$$

Aufgabe 3.4 Nicht alle Funktionen sind differenzierbar.

(a) Zeigen Sie, daß $|x|$ an der Stelle 0 *nicht* differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß $|x|^3$ erste und zweite Ableitungen besitzt (welche?). Auch an der Stelle 0 besitzt $|x|^3$ eine erste und zweite Ableitung, aber ist dort *nicht* dreimal differenzierbar.



Parabel mit Kreis, der bei (a, a^2) berührend durchquert.
Die Mittelpunkte (x_m, y_m) dieser Kreise liegen auf der Kurve mit Spitze; dies ist ein Beispiel einer parametrisierten Kurve $a \mapsto (x_m, y_m)(a)$.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 4.1 Nicht alle Funktionen sind rational

Aus der Schule weiß man (glaubt man zu wissen), daß es Funktionen wie den Sinus und die Exponentialfunktion gibt. Man "weiß" vielleicht auch, daß die zweite Ableitung von sin gleich $-\sin$ ist und die erste Ableitung von e^x gleich e^x ist.

Unabhängig von solchem Vorwissen sollen Sie zeigen, daß es **keine** rationalen Funktionen $f(x) = P_1(x)/Q_1(x),\ g(x) = P_2(x)/Q_2(x)$ (außer $f = 0$ oder $g = 0$) gibt, so daß

$$f''(x) = -f(x), \text{ bzw. } g'(x) = g(x).$$

gilt. Also sind die Exponentialfunktion und der Sinus, falls sie doch existieren sollten, keine rationalen Funktionen. (Tip: Die Grade der beteiligten Polynome vergleichen.)

Aufgabe 4.2 Polynome mit großen Argumenten

Sei $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ mit $a_n = 1$. Berechnen Sie aus den Koeffizienten ein $R \geq 1$, so daß Sie für alle $x \notin [-R, R]$ zeigen können

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P(x)}{x^n} - 1\right| &\leq \frac{\text{Konstante}}{|x|}, \\
\left|\frac{P(x)}{x^k}\right| &\leq 2|x|^{n-k}, \text{ falls } n < k \\
\left|\frac{P(x)}{x^k}\right| &\geq \frac{1}{2}|x|^{n-k}, \text{ falls } n > k.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.3 Koeffizienten an der Entwicklungsstelle

Beweisen Sie mittels Induktion für alle $a \in \mathbb{Q}$ die binomische Formel

$$(a + X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} X^k.$$

Wenden Sie diese Formel auf $X = a + (X - a)$ für $a \in \mathbb{Q}$ an, um auf eine andere Weise als in Aufgabe 2.1 zu zeigen, daß es $b_l \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$P(X) - P(a) = \sum_{l=1}^{n} b_l (X - a)^l.$$

Wir sagen auch, wir entwickeln das Polynom an der Stelle a. Wie hängen die Werte $P^{(k)}(a)$ der k-ten Ableitung von P an der Stelle a mit den Entwicklungskoeffizienten b_k zusammen?

Aufgabe 4.4 Schmiegparabeln schneiden

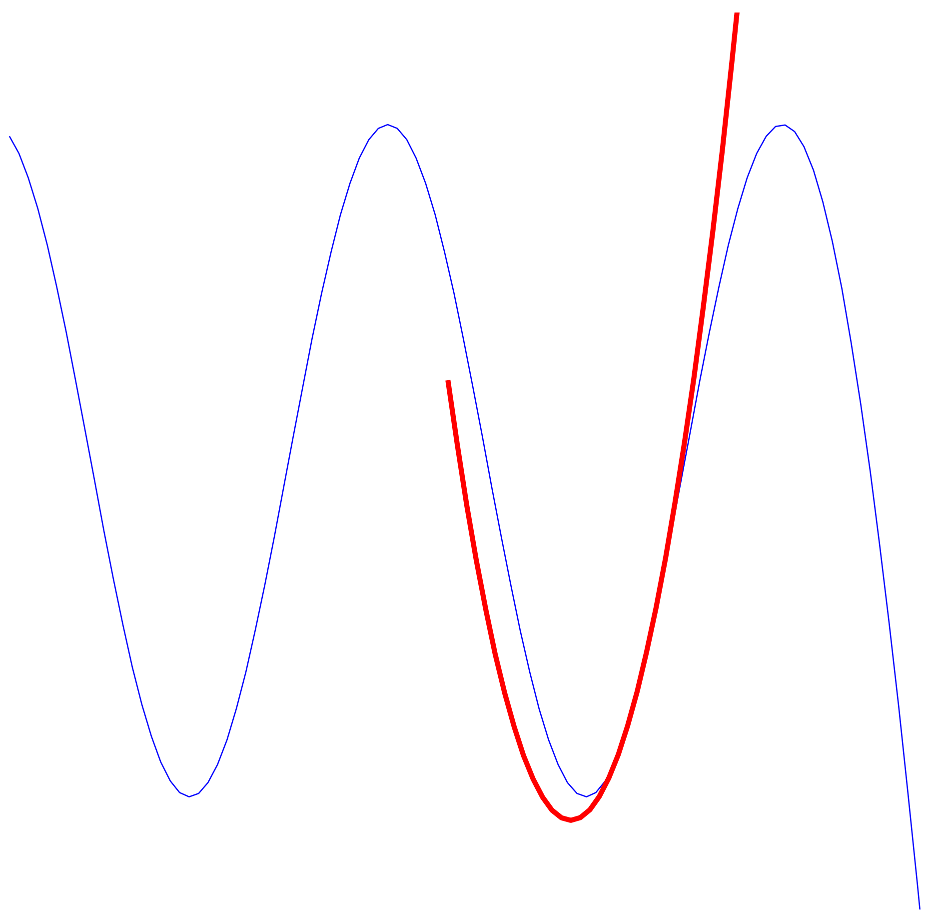
Sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 3$. Betrachten Sie die folgende "Schmiegparabel" an der Stelle a gegeben durch

$$S(X) := P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{1}{2}P''(a)(X-a)^2.$$

Bemerken Sie, daß $S(a) = P(a)$, $S'(a) = P'(a)$, und $S''(a) = P''(a)$ gilt. Ferner setzen wir $P'''(a) \neq 0$ voraus. Zeigen Sie, daß es ein Polynom Q_a gibt, das die Gleichung

$$P - S = (X-a)^3 \cdot Q_a$$

erfüllt. Verifizieren Sie $Q_a(a) \neq 0$. Folgern Sie, daß jede solche Schmiegparabel den Graph von P berührt und durchquert. Präzisieren Sie die Aussage: Im allgemeinen (falls $P''(a) \neq 0$) wird P *besser* von der Schmiegparabel berührt als von der Tangente.



Graph eines Polynoms mit Schmiegparabel

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 5.1 Produktformeln fürs Differenzieren

(a) Seien f und g n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie für $k \leq n$ die Formel

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x).$$

(b) Leiten Sie für differenzierbare $f_1, \ldots, f_n$ die Formel

$$(f_1 \ldots f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \ldots f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \ldots f_n(x)$$

her.

Aufgabe 5.2 Beste Approximationen

Seien f eine auf dem Intervall (α, ω) n-mal differenzierbare Funktion und $a \in (\alpha, \omega)$.

(a) Zeigen Sie, daß es ein eindeutiges Polynom $T_{n,a} \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grade $\leq n$ gibt mit

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T_{n,a}'(a) = f'(a),\ \ldots\ , T_{n,a}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Das Polynom $T_{n,a}$ heißt *Taylorpolynom vom Grad n bei a zu f*. Speziell ist die Tangente T_a das Taylorpolynom $T_{1,a}$ vom Grad 1.

(b) Sei jetzt $2 \leq k+1 \leq n$. Sei weiterhin K eine Zahl, so daß für alle $x \in (\alpha, \omega)$ die Ungleichung $|f^{(k+1)}(x)| \leq K$ gilt. Zeigen Sie, daß für alle $a, x \in (\alpha, \omega)$

$$|f(x) - T_{k,a}(x)| \leq \frac{K}{(k+1)!}|x-a|^{k+1}$$

gilt. Insbesondere zeigt dies nochmal, daß die Tangente dasjenige lineare Polynom ist, das als einziges f an der Stelle a mit quadratischem Fehler approximiert.

Aufgabe 5.3 Induktion und Abschätzung

(a) Zeigen Sie mittels Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{3}n^3 \leq \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

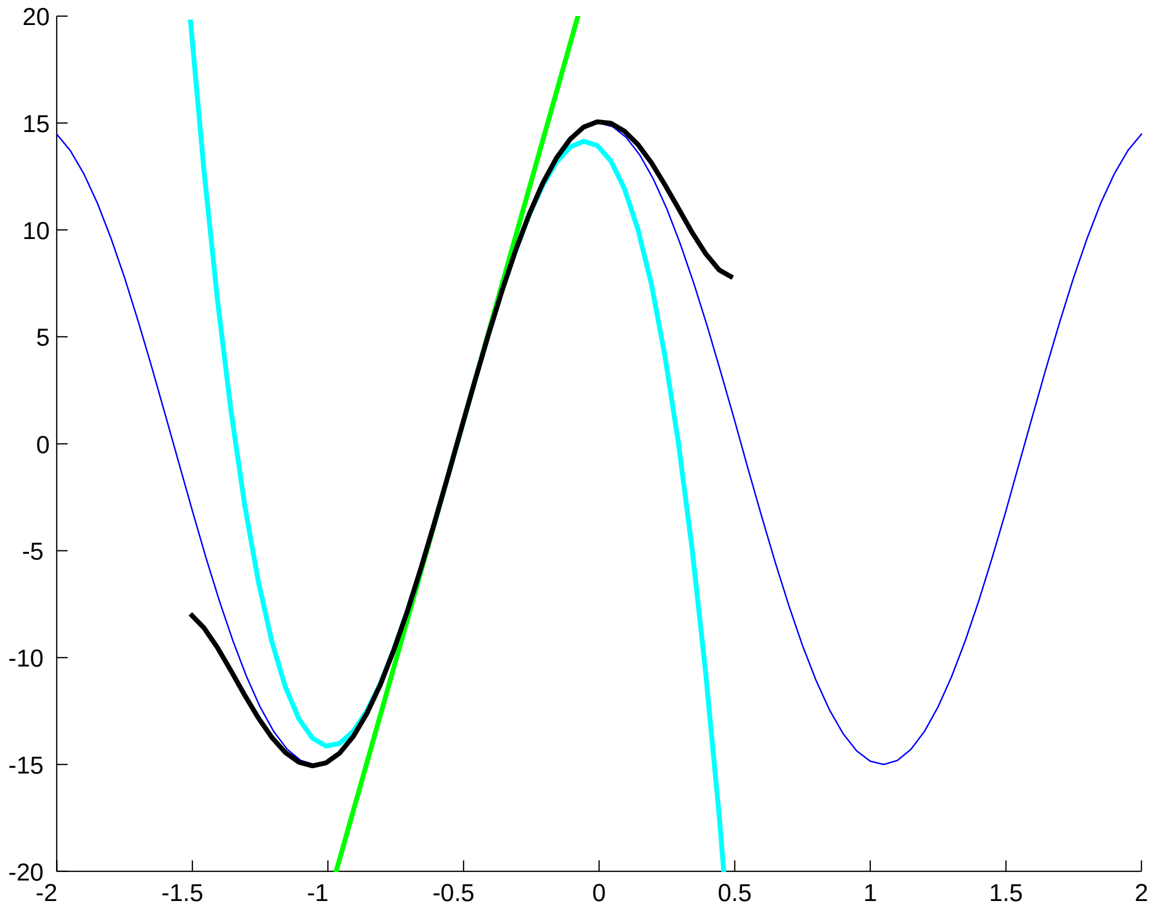
(b) Finden und beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \ldots$.
(c) Leiten Sie (a) noch einmal aus (b) her.

Aufgabe 5.4 Polynomfunktionen

Fassen Sie $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ als Polynomfunktionen auf und nehmen Sie an, daß ein $C \in \mathbb{Q}$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{Q}$

$$|P(x) - Q(x)| < C$$

gilt. Zeigen Sie, daß es ein $\lambda \in (-C, C)$ gibt, so daß die Gleichung $P(x) = Q(x) + \lambda$ erfüllt ist.



Taylorpolynome der Ordnungen 1, 3, 5

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 6.1 Wachsende Funktionen

Zeigen Sie für differenzierbare f: f wachsend $\Rightarrow f' \geq 0$.
Da die Werte $f'(x)$ durch eine Eigenschaft charakterisiert sind und nicht aus f 'ausgerechnet' werden, muß dies indirekt bewiesen werden. – Woher kennen Sie die Umkehrung?

Aufgabe 6.2 Folgen und Nullfolgen

Welche der nachstehenden Folgen sind Nullfolgen (immer $n \in \mathbb{N}$), und warum?

(a) $a_n = \frac{1}{k}$ für alle n mit $(k-1)^{k-1} + 1 \leq n \leq k^k$ und dann für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ für ein festes (evtl. sehr großes) $x > 0$.

(c) $a_n = \frac{1}{(1-x)^2} - \sum_{j=1}^{n} jx^{j-1}$ für $|x| < 1$. Differenzieren Sie die Summenformel für die endliche geometrische Reihe; zeigen Sie zuerst $a_n \geq 0$. Ist $\{a_n\}$ monoton?

(d) $a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}$ und $a_{2n+1} = 1 - \frac{1}{(2n+1)^2}$

(e), (f) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $n^{1/n} \leq 1 + 2/\sqrt{n}$
– mit Hilfe der binomischen Formel.
– mit Hilfe einer quadratischen Taylorparabel (also mit dem Monotoniesatz).

(g) Mit Hilfe der Wachstumsrate f'/f wurde in der Vorlesung gezeigt: $(1 + x/n)^n$ ist monoton wachsend in n. Zeigen Sie analog:
$a_n(x) := (1 + x/n + 0.5x^2/n^2)^n$ ist für $x \geq 0$ monoton in n.

Aufgabe 6.3 Folge der ersten n Mittelwerte

Zeigen Sie: Falls die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert, so konvergiert auch die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Mittelwerte der Anfangsstücke der Folge $\{a_n\}$ gegen denselben Grenzwert.

$$\text{Definition: } b_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \text{Behauptung: } \lim_n b_n = a.$$

Es gibt einfache Beispiele dafür, daß die Umkehrung falsch ist. Finden Sie eines.

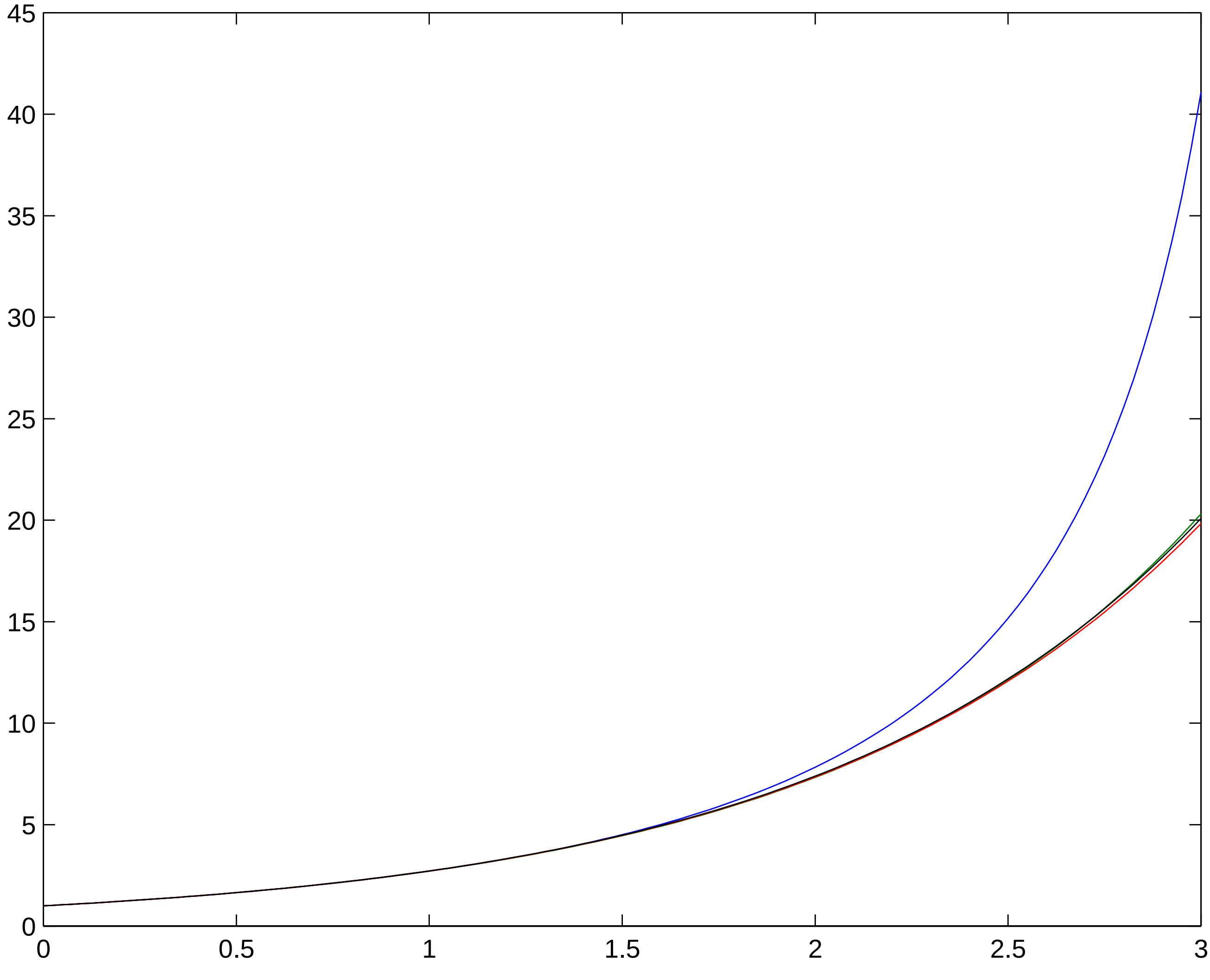
Aufgabe 6.4 Ableitung Rationaler Funktionen

Gegeben sei folgende Schar von Funktionen $f(x) := (1 + ax + bx^2)/(1 - (1 - a)x)$.

(a) Differenzieren Sie f zweimal und bestimmen Sie a und b, so daß $f(0) = f'(0) = f''(0)$ und $f'(1) = f(1)$ erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie (mit den a, b aus (a)), daß für $0 \leq x \leq 1$ gilt: $f'(x)/f(x) \leq 1$.

(c) Vergleichen Sie numerisch $f(1)$, $f(1/2)^2$, $f(1/4)^4$ und e^1. Fällt Ihnen eine Begründung ein, warum diese drei rationalen Werte die Zahl $\exp(1)$ so gut approximieren? Überlegen Sie zuerst, wie sich Fehler unter Quadrieren fortsetzen, dann warum f näher bei 0 viel besser approximiert.



Approximationen der Exponentialfunktion nach Aufgabe 6.4c

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 7.1 Ein Taylorfeind

Sei die Funktion f gegeben durch $f(x) := \exp(-x^{-2})$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von $(0 \leq x \Rightarrow (1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x)$ die Ungleichung:

$$0 \leq f(x) \leq n^n x^{2n}$$

(b) Berechnen Sie f' und f'' (für $x = 0$ mit der Differenzierbarkeitsdefinition).

(c) Zeigen Sie, daß es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $R_k(x) = P_k(x) \cdot x^{-3k}$, $P_k \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, so daß für alle $x \neq 0$ gilt: $f^{(k)}(x) = R_k(x) f(x)$ (Induktionsbeweis).

(d) Zeigen Sie, daß es für alle $k \in \mathbb{N}$ Konstanten K_k gibt, so daß gilt:

$$\forall\, x \in [-1, 1] - \{0\} : |f^{(k)}(x)| \leq K_k \cdot x^2$$

Insbesondere gilt also $f^{(k+1)}(0) = 0$. Wie sehen die Taylorpolynome an der Stelle 0 aus?

Aufgabe 7.2 Splines - ohne Fehlerschranken, aber mit Basis

Sei $\delta > 0$. Sei $\mathrm{Diff}^1(a - \delta, b + \delta)$ der Vektorraum aller auf dem offenen Intervall $(a - \delta, b + \delta)$ differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$.

(a) Betrachten Sie diejenige Abbildung, die einer Funktion f aus Diff^1 den reellen Vektor $(f(a), f'(a), f(b), f'(b)) \in \mathbb{R}^4$ zuordnet. Zeigen Sie, daß dies eine lineare Abbildung ist.

(b) Schränken Sie diese Abbildung auf den Untervektorraum $\mathrm{Pol}_3[X]$ der Polynome vom Grad ≤ 3 ein und zeigen Sie, daß diese eingeschränkte Abbildung injektiv ist. Bestimmen Sie außerdem explizit eine Basis von $\mathrm{Pol}_3[X]$ auf die folgende Weise: Setzen Sie drei der vier Komponenten des Bildvektors Null und die vierte Eins. Finden Sie ein Urbild. Sie erhalten so vier linear unabhängige (warum?) Polynome, also eine Basis für $\mathrm{Pol}_3[X]$.

(c) Zeigen Sie, daß es zu einem gegebenen $f \in \mathrm{Diff}^1(a - \delta, b + \delta)$ genau ein Polynom vom Grad ≤ 3 gibt, dessen Funktions- und Ableitungswerte bei a, b mit f übereinstimmen.

Funktionen, die stückweise mit kubischen Polynomen übereinstimmen und die an den Stützstellen (also den Stellen, an denen verschiedene kubische Polynome zusammen stoßen) differenzierbare Funktionen sind, heißen Splines. Sie sind hervorragend geeignet für Interpolationen.

Aufgabe 7.3 Folgen von Sehnensteigungen

Sei $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $r_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei f eine auf (α, ω) differenzierbare Funktion und $a \in (\alpha, \omega)$. Zeigen Sie zuerst: Es gibt eine Zahl $n_a \in \mathbb{N}$ so daß für $n \geq n_a$

gilt $a + r_n \in (\alpha, \omega)$. Zeigen Sie für diese $n \geq n_a$, daß die Folge der Sehnensteigungen durch $(a, f(a))$ und $(a + r_n, f(a + r_n))$ gegen die Ableitung $f'(a)$ von f im Punkt a konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a + r_n) - f(a)}{r_n} = f'(a).$$

Aufgabe 7.4 Kettenregel und Umkehrfunktionen

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar, und es gelte $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Gib $(g'(y), g''(y), g'''(y))$ in Abhängigkeit von $(f(x), f'(x), f''(x), f'''(x))$ mit $x = g(y)$ an.

(b) Seien $f(x) = x^4$ und $g(y) = \sqrt[4]{y}$; berechne g', g'' einerseits mit der Kettenregel, andererseits nach (a).

(c) Sei $f = \cos$ und $a \in [1/10, 1]$. Geben Sie die ersten drei Taylorpolynome der Umkehrfunktion an der Stelle $A := \cos(a)$ an, vgl. Abbildung.

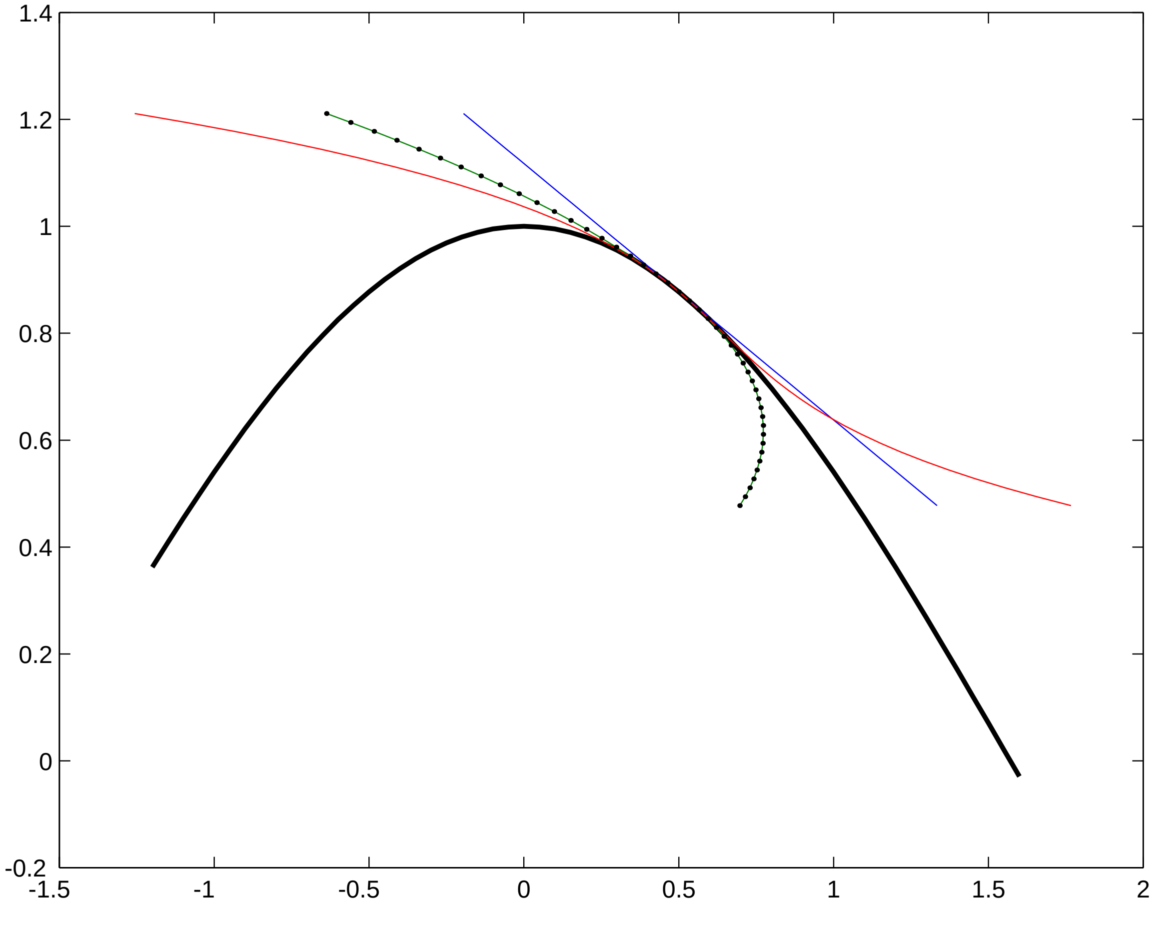


Bild des Graphen von $\cos$, $\{(x, \cos(x));\ x \in [-1, \pi/2]\}$ und der ersten drei Taylorpolynome der Umkehrfunktion. Diese sind als $(T(y), y)$ geplottet, obwohl man leider der Zeichnung nicht sehr ansieht, ob die x-Achse auf die y-Achse, oder umgekehrt, abgebildet wird. Das Bild der zweiten Taylorapproximation ist nur für die Richtung $y \to x$ Graph einer Funktion.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 8.1 Auswahl von Teilfolgen und wichtige Argumente

Eine Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn es ein $K > 0$ gibt mit $|m| \leq K$ für alle $m \in M$.

(a) Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte unendliche Menge. Zeigen Sie, daß man eine Folge $\{x_n\} \subset M$ auswählen kann, für die $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gilt und die konvergiert. Kann man etwas darüber aussagen, ob der Grenzwert in M liegt oder nicht?

Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einer Menge M ist ein Abbildung $a : \mathbb{N} \to M, n \mapsto a_n := a(n)$. Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung. Die Verknüpfung $a \circ \varphi$ der beiden Abbildungen

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \xrightarrow{a} M,\ n \mapsto a_{\varphi(n)}$$

ist wieder eine Folge. Wir nennen $\{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn φ streng monoton ist. Wir nennen $\{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wenn φ bijektiv ist.

(b) Beweisen Sie, daß jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält.
(c) Zeigen Sie, daß für jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ auch jede Umordnung konvergiert, und zwar gegen denselben Grenzwert.

Aufgabe 8.2 Produktregel für komplex differenzierbare Funktionen

Formulieren und beweisen Sie die Produktregel für komplex differenzierbare Funktionen.

Aufgabe 8.3 Potenzreihen

Sei $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit $|a_k| \leq 1$. Zeigen Sie, daß für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ die Folge $\{P_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Beweisen Sie die von n unabhängige Schranke

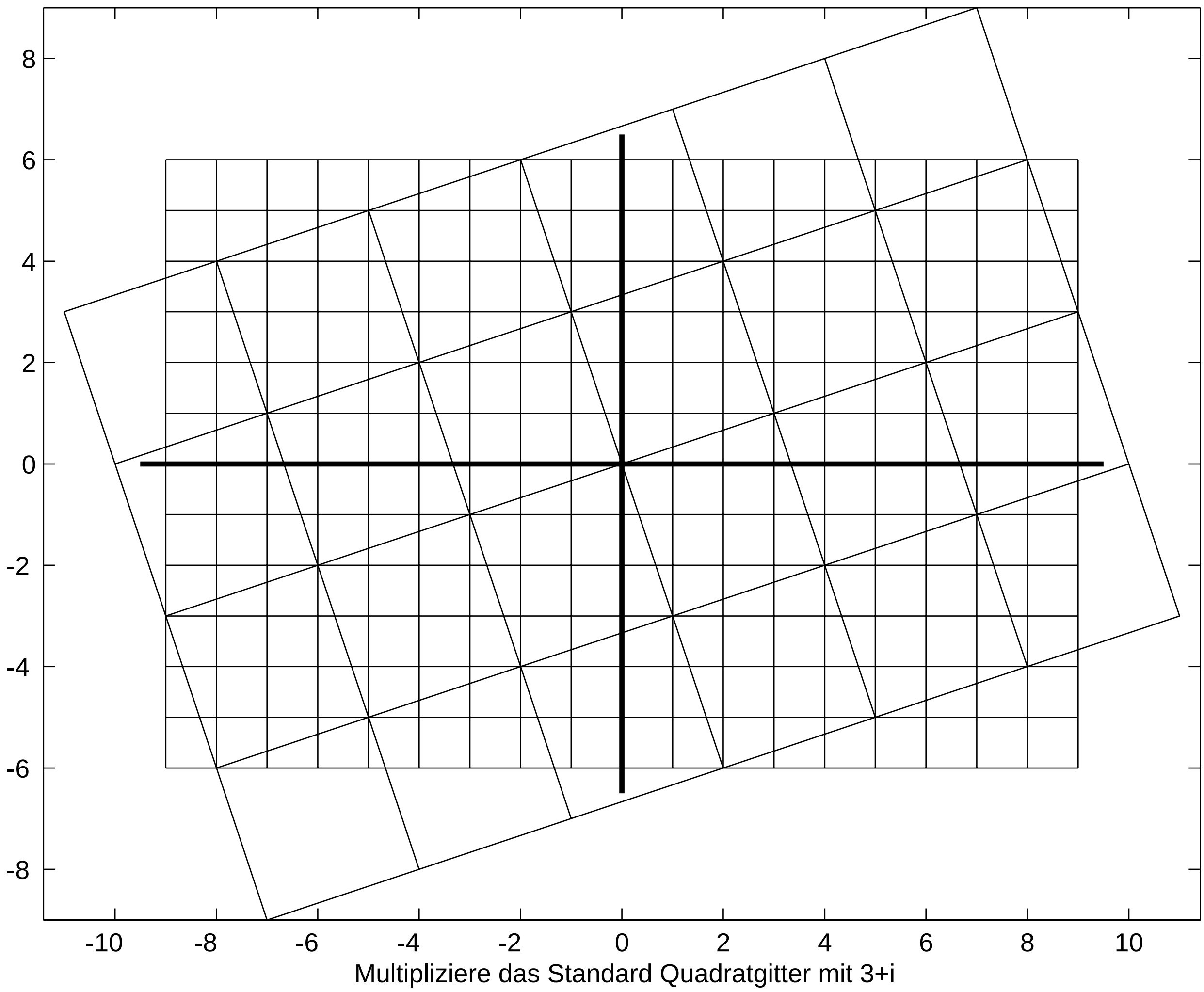
$$|P_n'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}.$$

Aufgabe 8.4 Komplexe Multiplikation

Wir betrachten den Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i] = \{c \in \mathbb{C} \mid \exists\, m, n \in \mathbb{Z}\; c = m+ni\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, daß dies tatsächlich ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist. (Tip: Die für einen euklidischen Ring geforderte Gradfunktion ist hier einfach das Quadrat des Betrags einer komplexen Zahl. Betrachten Sie das Bild des Gitters $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ unter Multiplikation mit einer Zahl.

Welcher Punkt eines Bildquadrates hat den größten Abstand zum nächsten Eckpunkt des Bildgitters?)



Multipliziert man das Standardgitter (es hat als Eckpunkte die Punkte in $\mathbb{Z}[i]$) mit einer Zahl $c \in \mathbb{Z}[i]$, so entsteht ein schräg liegendes quadratisches (!) Untergitter.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 9.1 Die komplexe Funktion $\frac{1}{z}$

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) := \frac{1}{z}$. Zeigen Sie, daß $z \mapsto \frac{1}{z}$ im Definitionsbereich komplex differenzierbar ist.
Variieren Sie den früheren Beweis, indem Sie verschiedene Möglichkeiten, die Konstanten zu wählen, angeben: Finden Sie zu jedem $c \in \mathbb{C} - \{0\}$ und jedem $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < \frac{|c|}{2}$ ein möglichst kleines $K_{c,r} > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z - c| \leq r \Rightarrow |f(z) - f(c) - f'(c)(z - c)| \leq K_{c,r}|z - c|^2$$

Aufgabe 9.2 Folgen

Alle in dieser Aufgabe betrachteten Folgen seien Folgen in $\mathbb{C}$. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in Quantorenschreibweise. Verneinen Sie anschließend die Aussagen in Quantorenschreibweise, und geben Sie jeweils ein Beispiel an, für das Sie die verneinte Eigenschaft nachweisen.
(a) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
(b) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.
(c) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.
(d) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Betrachten Sie jetzt zu einer Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$. Zeigen Sie:

$$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \Rightarrow \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 9.3 Teleskopsummen

(a) Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \text{ bzw. } a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$$

Solche Summen nennen wir Teleskopsummen. Gilt diese Aussage in beliebigen Ringen?
(b) Zeigen Sie mit einer Folgerung des Schrankensatzes und $\log'(x) = 1/x$ die folgenden Ungleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log(n) \leq \frac{1}{n}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ der harmonischen Reihe nicht konvergiert.

(c) Zeigen Sie folgende Ungleichung, und folgern Sie die Konvergenz der linken Reihe.

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}\right)$$

(d) Zeigen Sie den folgenden Satz von Euler:

$$\text{Die Folge } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad a_n := \log n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{ist konvergent.}$$

Tip: Betrachten Sie die Teleskopsumme $\sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$.

Aufgabe 9.4 Additionstheorem und Eindeutigkeitssatz

Ziel dieser Aufgabe ist es, einen Beweis für das folgende Additionstheorem anzugeben:

$$\forall\, x, a \in \mathbb{R}\ \ \sin(a+x) = \sin(a)\cos(x) + \cos(a)\sin(x)$$

Wir gehen dabei folgendermaßen vor. Bekanntlich löst Sinus die Differentialgleichung

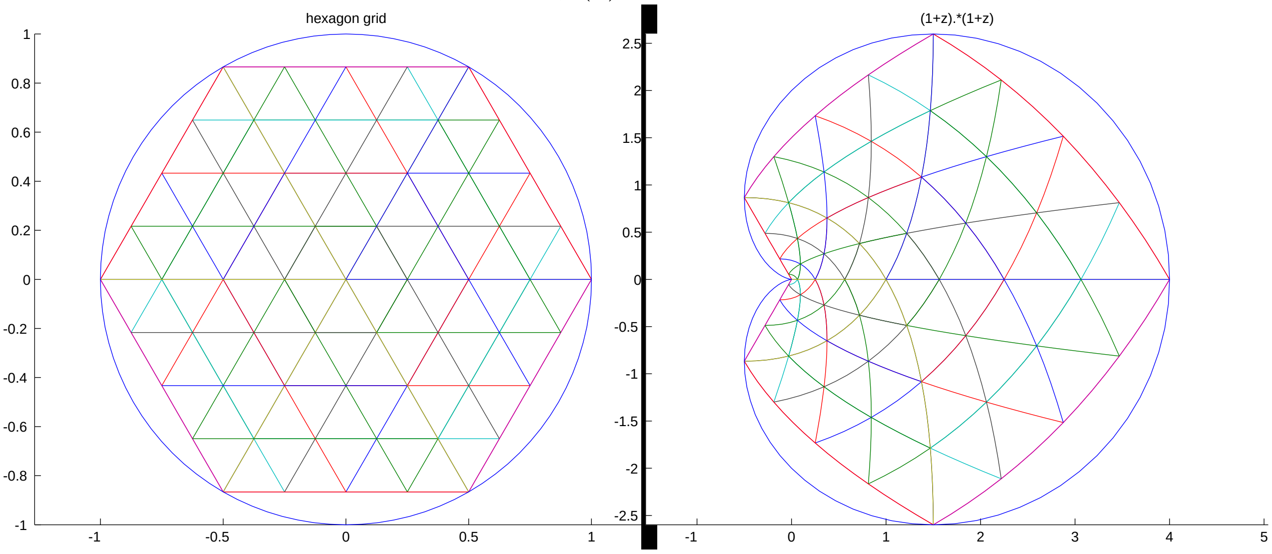
$$(*)\ \ f'' + f = 0.$$

Wenn eine zweimal differenzierbare Funktion f eine Lösung von $(*)$ ist, so nennen wir $f(0)$ und $f'(0)$ ihre Anfangswerte.

(a) Zeigen Sie, daß jede Lösung der Gleichung $(*)$ auch die folgende Gleichung erfüllt:

$$(f')^2 + f^2 = \text{const., ausführlicher } \exists\, c \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R}\ f'(x)^2 + f(x)^2 = c.$$

(Diese Gleichung ist der Energieerhaltungssatz. Bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ entspricht $(f')^2$ der kinetischen und f^2 der potentiellen Energie eines harmonischen Pendels.)
(b) Seien g und h zwei Lösungen der Differentialgleichung. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), daß g und h schon gleich sind, wenn ihre Anfangswerte übereinstimmen.
(c) Beweisen Sie mit Hilfe von (b) das Additionstheorem, indem Sie nachweisen, daß beide Seiten des Additionstheorems Gleichung $(*)$ erfüllen und dieselben Anfangswerte haben.



Diese Bilder veranschaulichen das Verhalten der Funktion $(1+z)^2$. Die Stelle, an der der 120°-Winkel verdoppelt wird, ist die Nullstelle der Ableitung.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 10.1 Argumentieren Sie mit der Definition einer Nullfolge!

Betrachten Sie Folgen in $\mathbb{C}$, und zeigen Sie **sorgfältig** die folgenden beiden Aussagen.
(a) Die Summe zweier Nullfolgen ist eine Nullfolge.
(b) Das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge ist eine Nullfolge.

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:
(c) Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
(d) Für **jede** Nullfolge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $\{a_n c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 10.2 Das Bild der reellen Exponentialfunktion

(a) Sie kennen die definierende Differentialgleichung und die Taylorreihe der Exponentialfunktion. Leiten Sie aus $\exp' = \exp$ die Funktionalgleichung $e^{a+b} = e^a e^b$ her.

(b) Zeigen Sie, daß das Bild der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ liegt. (Tip: Schätzen Sie zuerst die Werte für $x \geq 0$ mit Hilfe der Definition ab.)

(c) Zeigen Sie jetzt unter Verwendung des Zwischenwertsatzes, daß die Exponentialfunktion surjektiv auf $\mathbb{R}_+$ abbildet.

Aufgabe 10.3 Komplexe Exponentialfunktion

Die Eulersche Formel für die komplexe Exponentialfunktion lautet:

$$\forall\ z \in \mathbb{C}\ \ e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (*)$$

Beweisen Sie $(*)$ zum einen mit den Potenzreihendarstellungen und zum anderen, indem Sie die Funktion

$$\frac{\cos z + i \sin z}{e^{iz}}$$

ableiten und die Konsequenzen des Schrankensatzes benutzen.

Beweisen Sie auch die Formel

$$\forall\ z \in \mathbb{C}\ \ (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

auf zwei verschiedene Weisen, einmal durch Differenzieren der linken Seite, und ein zweites Mal als Folgerung aus $(*)$. (Tips für den zweiten Weg: $|z|^2 = z\bar{z}$; warum ist $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$?)

Aufgabe 10.4 Fixpunktsatz für kontrahierende Selbstabbildungen

Wir nennen eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge aus M in M konvergiert, d.h. wenn für jede Folge, deren Glieder alle in M liegen und die eine Cauchy-Folge ist, auch ihr Grenzwert in M liegt.

Wir nennen eine Abbildung $f : M \to \mathbb{C}$ **kontrahierend**, wenn ein $0 \leq L < 1$ existiert, so daß für alle x und y aus M die Ungleichung

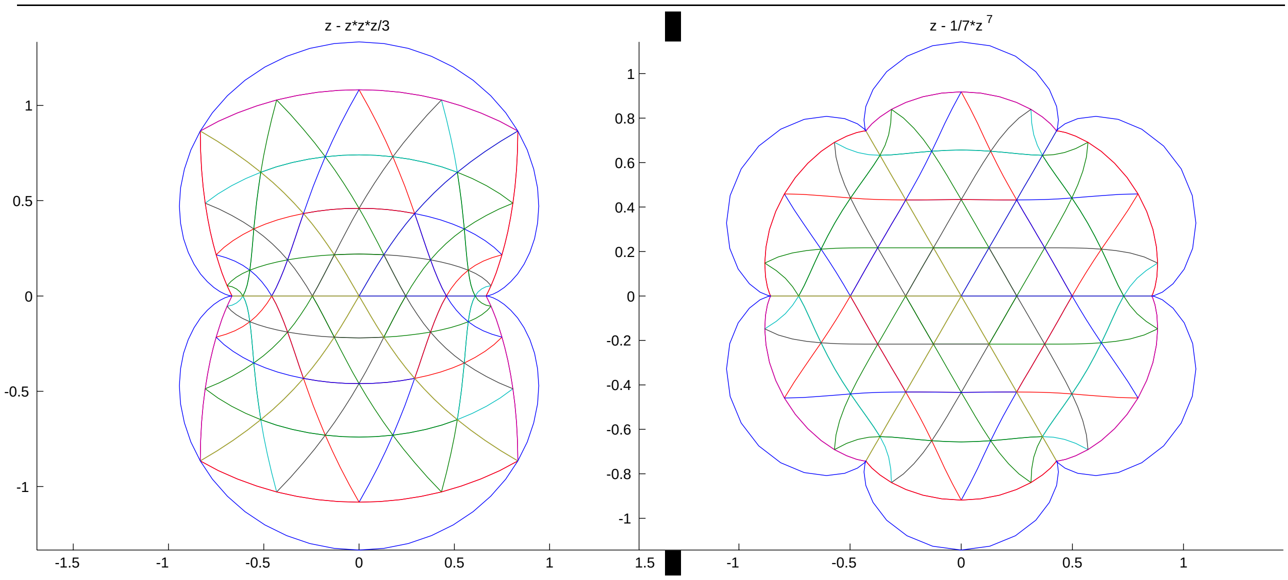
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

gilt. Wir nennen f eine **Selbstabbildung**, wenn $f(M) \subset M$ gilt.

(a) Zeigen Sie, daß eine kontrahierende Selbstabbildung einer vollständigen Teilmenge M von $\mathbb{C}$ genau einen Fixpunkt besitzt, d.h. daß es ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = x$. Betrachten Sie dazu zu einem beliebigen $c \in M$ die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_0 := c$ und $c_n := f(c_{n-1}), n > 0$. Zeigen Sie, daß alle Folgen dieser Form gegen x konvergieren. (Tip: $|c_{n+1} - c_n| \leq ?$, geometrische Reihe zum Majorisieren.)

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion, und sei $A \subset U$ eine konvexe und vollständige Teilmenge, auf der $|f'| \leq q < 1$ gilt, d.h. für alle $z \in A$ gilt $|f'(z)| \leq q < 1$. Zeigen Sie, daß f auf A kontrahierend ist. Besitzt f dann auch notwendigerweise einen Fixpunkt? (Beweisversuch oder Gegenbeispiel?)

(c) Zeigen Sie, daß die Abbildungen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = e^{-x}$ einen Fixpunkt haben. Berechnen Sie den Fixpunkt von f explizit, aus der Definition von f. Berechnen Sie auch einige Elemente der Iterationsfolge, die bei $c_0 = 1$ beginnt; man nennt diese Folge, die gegen den Grenzwert konvergiert, einen Kettenbruch. (Tip für g: Betrachten Sie das Intervall $[0.1, -\log 0.1]$.)



Bilder des gepflasterten Sechsecks mit Einheitskreis (Blatt 9) unter $z \mapsto z - z^3/3$ und unter $z \mapsto z - z^7/7$. In welchen Punkten ist $f'(z) = 0$?

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 11.1 Polarkoordinaten

(a) Zeigen Sie, daß sich jede komplexe Zahl $z \neq 0$ eindeutig darstellen läßt als $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Wir nennen dies die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahl z.

(b) Betrachten Sie die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$. Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion ein surjektiver Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ auf die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist. Bestimmen Sie den Kern der Abbildung. (Tip: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$)

(c) Sowohl die reelle, als auch die imaginäre Achse sind Untergruppen von $(\mathbb{C}, +)$. Bestimmen Sie deren Bild unter dem Gruppenhomomorphismus exp.

Aufgabe 11.2 Umkehrfunktionen von Potenzreihen

Die Funktion Tangens ist definiert durch $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\cos z \neq 0$. Wir schauen uns an, welche Eigenschaften eine Umkehrfunktion haben muß, wenn sie denn existiert.

(a) Geben Sie zuerst das maximale Definitionsgebiet des Tangens an (Tip: $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$) und zeigen Sie die Differentialgleichung des Tangens:

$$\tan' = 1 + \tan^2$$

(b) Folgern Sie, daß jede Umkehrfunktion U des Tangens die folgende Gleichung erfüllt:

$$U'(w) = \frac{1}{1 + w^2}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten Sie eine Potenzreihe für U'. Zeigen Sie, daß diese Reihe für $|w| < 1$ konvergiert und für $|w| > 1$ nicht konvergiert.

(c) Definieren Sie U, indem Sie "wie bei Polynomen" eine Stammfunktion der Potenzreihe aus (b) angeben. Warum ist $U(0) = 0$ wichtig? Wo konvergiert die neue Potenzreihe? Zeigen Sie, daß U wirklich eine Umkehrfunktion des Tangens ist. Können Sie sich eine Umkehrfunktion mit größerem Definitionsgebiet vorstellen? Umkehrfunktionen, die bei $w = 0$ den Wert 0 haben, heißen Arcustangens. Wir und andere schreiben arctan.

(d) Folgern Sie aus den Additionstheoremen für sin und cos das für tan. Folgern Sie aus $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ auch $\frac{\pi}{4} = \arctan(1/4) + \arctan(3/5)$. (Puzzle: 1 liegt nicht im Konvergenzkreis von U, aber $U(1)$ ist eine konvergente Leibnizreihe. Gilt $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm ...$?)

Aufgabe 11.3 Konvexe Funktionen

Wir nennen eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex, wenn für alle $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x < x_2$ die Ungleichung

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie: Eine Funktion ist genau dann konvex auf (a, b), wenn für je zwei Punkte $z_1, z_2 \in (a, b)$ mit $z_1 \neq z_2$ und jedes $\lambda \in (0, 1)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2) \leq \lambda f(z_1) + (1-\lambda)f(z_2).$$

(b) Charakterisieren Sie konvexe Funktionen umgangssprachlich. Veranschaulichen Sie sich dazu den Graphen der rechten Seite der beiden Ungleichungen.

Sei jetzt f auf (a, b) zweimal differenzierbar. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) f ist konvex.

(ii) f' ist monoton wachsend.

(iii) $f'' \geq 0$, d.h. $\forall x \in (a, b)\ f''(x) \geq 0$.

Aufgabe 11.4 Einfache Näherungen für das Integral

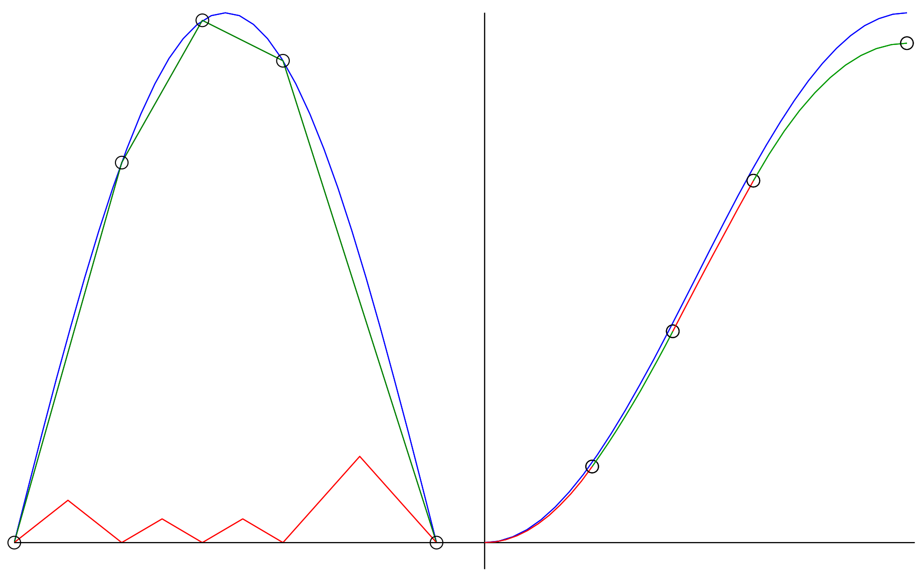
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir betrachten

$$\mathrm{STr}_f(a, b) := \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a),$$

$$\mathrm{TTr}_f(a, b) := f(\frac{a+b}{2})(b - a).$$

Dies sind die Flächeninhalte des Sehnentrapezes und des Tangententrapezes von f zwischen a und b. Sei F eine Stammfunktion, also $F' = f$. Zeigen Sie:

$$f \text{ konvex } \Rightarrow \mathrm{TTr}_f(a, b) \leq F(b) - F(a) \leq \mathrm{STr}_f(a, b).$$



Graph f mit stückweise linearer Approximation und maximalem Fehler, Stammfunktion F von f und stückweise quadratische Stammfunktion der Approximation.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 12.1 Abbildungsnorm für lineare Abbildungen

Seien $(V, |\ |_V)$ und $(W, |\ |_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann können wir auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen $V \to W$ – d.h., nach Wahl von Basen von V und W, auch auf dem entsprechenden Matrizenraum – die **Abbildungsnorm** definieren:

$$(*) \qquad \|A\| := \sup\{|Av|_W;\ v \in V,\ |v|_V \le 1\}.$$

Um dieses Supremum hinschreiben zu können, müssen Sie zunächst eine obere Schranke für die rechts stehende Teilmenge von $\mathbb{R}$ angeben. Wir zeigen das für d-dimensionale Vektorräume V mit Basis $v_1, \ldots, v_d$ bei Verwendung der Würfel- oder Maximumnorm $|v|_\square := \max\{|x_k|;\ v = \sum_{i=1}^d x_k v_k\}, d < \infty$.

(a) Finden Sie (z.B. wie in der Vorlesung) zu einer linearen Abbildung (bzw. Matrix) $A : V \to V$ des d-dimensionalen Vektorraums V ein $S > 0$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$|Av|_\square \le S \cdot |v|_\square \qquad \text{(Beachte: } Av = \sum x_k \cdot Av_k)$$

(b) Wegen (a) kann Definition $(*)$ für Würfelnormen gemacht werden (für $V \neq W$ ähnlich). Folgern Sie: $|Av|_\square \le \|A\| \cdot |v|_\square$, $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$, $\|A \circ B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt: Eine beliebige Norm $|\ |_u$ auf V ist äquivalent zu jeder Würfelnorm (*passende Worte zu:* $c|\ |_\square \le |\ |_u \le C|\ |_\square$). Rechtfertigen Sie damit Definition $(*)$ für $|\ |_u$.

Aufgabe 12.2 Normen und Cauchyfolgen von Matrizen

Wir verwenden auf $\mathbb{C}^d$ Ihre Lieblingsnorm und nach 12.1 $(*)$ auf $\mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{C})$ die zughörige Abbildungsnorm und die Ungleichungen 12.1 (b).

Es sei $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{C})$. In welchen der folgenden Beispielen handelt es sich um Cauchy-Folgen? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie bei Konvergenz evtl. den Grenzwert, auf jeden Fall eine gute Abschätzung für den Abstand zum Grenzwert an.

(1) $(a_n)_n$ mit $a_n := \big(A/(1 + \|A\|)\big)^n$; und $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$.
(2) $(b_n)_n$ mit $b_n := A^n$, $\|A\| < 1$; und $B_n := I_d + \sum_{k=1}^n b_k$; $B_n^* := (I_d - A)B_n$.
(3) $(c_n)_n$ mit $c_n := A^n$, $A \neq I_d$ und $\|A\| \ge 1$. (Ist die Antwort für jedes solche A 'nein'?)
(4) $(e_n)_n$ mit $e_n := I_d + \sum_{k=1}^n (-1)^k A^k/k!$. Der Grenzwert heißt $\exp(-A)$.

Aufgabe 12.3 Iterationsverfahren für die Nullstelle von sin

Wir verwandeln das Problem, Nullstellen einer Funktion f zu finden, in ein Fixpunktproblem für

$$h(z) := z + \frac{f(z)}{g(z)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

und versuchen g so zu wählen, daß $|h'| \le q < 1$ in der Nähe der Nullstelle z_* von f gilt, so daß die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes 10.4 erfüllt sind. Wir wollen folgendes Beispiel diskutieren: $h(x) := x + \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$. Probieren Sie zuerst mit dem Taschenrechner aus, wie schnell die rekursiv definierte Folge $x_0 \in [2,3|,\ x_{n+1} := h(x_n) = x_n + \sin(x_n)$ gegen den Fixpunkt $x_* = \pi = h(\pi)$ konvergiert. (Bez.: x reel in (b),(c), z komplex in (a),(d))

(a) (Newton Verfahren) Es sei $f(z_*) = 0, f'(z_*) = 1$ und $|f''(z)| \leq 8$, falls $|z - z_*| \leq 1$. Zeigen Sie für die Wahl $g = -f'$, daß h in der Scheibe $\{z;\ |z - z_*| \leq 0.04\}$ eine kontrahierende Selbstabbildung ist. Warum ist h auf kleineren Scheiben besser kontrahierend? — Beachten Sie, wie klein der Konvergenzbereich ist.

(b) (Modifiziertes Newton Verfahren). Sei $f := \sin$ und π als erste Nullstelle $x_* > 0$ von sin definiert. Folgern Sie zunächst (z.B. mit dem Zwischenwertsatz und der Differentialgleichung) $\sin'(\pi) = -1$. Setzt man $g(x) := 1 = -f'(x_*)$, so läßt sich h einfacher als in (a) ausrechnen, und eine Schranke < 1 für h' ergibt sich ebenfalls leichter als in (a). In welchem Intervall um π können Sie zeigen, daß h kontrahierend ist?

(c) Die experimentelle Konvergenz von $x_{n+1} := x_n + \sin(x_n)$ ist so schnell, daß sie nicht durch die Diskussion in (b) erklärt wird. Beachten Sie: $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \arcsin(\sin(x)) = \pi - x$. Begründen Sie mit dem quadratischen Taylorpolynom von arcsin bei 0, warum die Konvergenz so viel besser als erwartet ist. Tip: Betrachten Sie auch d as kubische Taylorpolynom von arcsin bei 0, probieren Sie $x_{n+1} := x_n + \sin(x_n) + \frac{1}{6}\sin(x_n)^3$ aus.

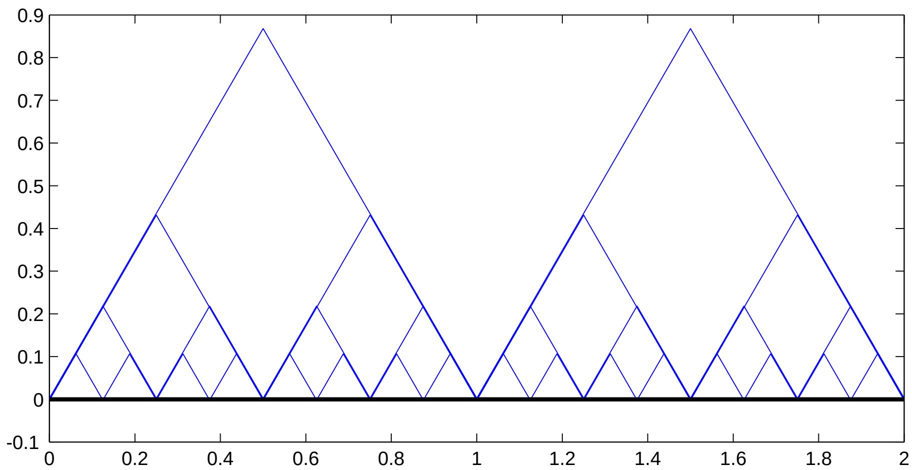
(d) Die Differentialgleichung $\sin'' = -\sin$ und die Symmetrie $\sin(\pi - z) = \sin(z)$ gilt auch in $\mathbb{C}$. Modifizieren Sie Ihre Argumente in (b) und geben Sie eine Kreisscheibe um $\pi \in \mathbb{C}$ an, in der $h(z) := z + \sin(z)$ kontrahierend ist.

Aufgabe 12.4 Intervallschachtelung für die Wurzelfunktion

Sei $g_1(x) := (1+x)/2\ (x > 0)$, betrachte die folgenden rekursiv definierten Funktionenfolgen:

$$f_j(x) := \frac{x}{g_j(x)}, \quad g_{j+1}(x) := \frac{g_j(x) + f_j(x)}{2}, \ j = 1, 2, \ldots$$

Zeige, daß für jedes feste $x > 0$ durch $\{\ [f_k(x), g_k(x)]\ \}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist. Wie folgt $\sqrt{x} \in [f_k(x), g_k(x)]$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ aus der Definition von f_k?



Stückweise lineare Funktionen, deren Graphen über jedem Intervall $[a, b]$ die Länge $2(b - a)$ haben. Der Graph der Grenzfunktion 0 hat aber nur die Längen $(b - a)$, die Längen der approximierenden Graphen konvergieren also **nicht** gegen die Länge des Graphen der Grenzfunktion.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 13.1 Nichtstetige Ableitung, aber überall definiert

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Zeigen Sie, daß die Ableitung bei 0 nicht folgenstetig ist, indem Sie zwei Nullfolgen $\{p_n\}, \{q_n\}$ angeben, so daß die Folgen der Funktionenwerte $\{f'(p_n)\}, \{f'(q_n)\}$ gegen 1 bzw. -1 konvergieren. Zeigen Sie auch, daß die Kehrwerte y der Nullstellen von f', $f'(1/y) = 0$, die Gleichung

$$\tan y = \frac{y}{2}$$

erfüllen, und beweisen Sie mit dem Zwischenwertsatz, daß es eine Nullfolge $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so daß die Folge $\{f'(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Nullfolge ist. (Tip: tan ist periodisch.)

Aufgabe 13.2 Regeln zum Differenzieren und Integrieren

(a) Leiten Sie aus der Produktregel für das Differenzieren die Formel für partielle Integration her. Seien dazu f und g reellwertige differenzierbare Funktionen mit Lipschitz-stetigen Ableitungen. Seien a und b mit $a \leq b$ im Definitionsbereich von f und g. Zeigen Sie:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

(b) Leiten Sie für streng wachsendes φ die folgende Formel her (s. Abbildung am Schluß):

$$x\varphi(x) - a\varphi(a) = \int_a^x \varphi(t)dt + \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} \varphi^{-1}(t)dt,$$

wobei φ^{-1} die Umkehrfunktion von φ sein soll. Für die Behandlung dieser Aufgabe dürfen Sie φ und φ^{-1} als Lipschitz-stetig voraussetzen. Leiten Sie dazu beide Seiten der Gleichung ab, wobei Sie die Substitutionsregel benutzen, oder, bezeichnen Sie mit F eine Stammfunktion von φ^{-1}, drücken Sie das zweite Integral mit Werten von F aus und differenzieren Sie.

Aufgabe 13.3 Eine Kurve im Raum der Matrizen

Die Kurve $t \in \mathbb{R}, t \mapsto \exp(tA) := \mathbb{I}_d + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$ im Raum der quadratischen $d \times d$-Matrizen über $\mathbb{R}$ ist differenzierbar und hat bei t die Ableitung $A\exp(tA)$.
Tip: Die Teilsummen der Reihe können Sie leicht nach t differenzieren.

Aufgabe 13.4 Linearisieren von Matrixpotenzen

Sei $A \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ gegeben. Betrachten Sie $(A+X)^n : \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ als Funktion in X. Zeigen Sie – zuerst für $n=2, n=3$ –, daß sich diese Funktion schreiben läßt als

$$(A+X)^n := A^n + \operatorname{lin}(X) + R(X).$$

Dabei sei lin eine Funktion, die nur **linear** von X abhängt, d.h. es gilt

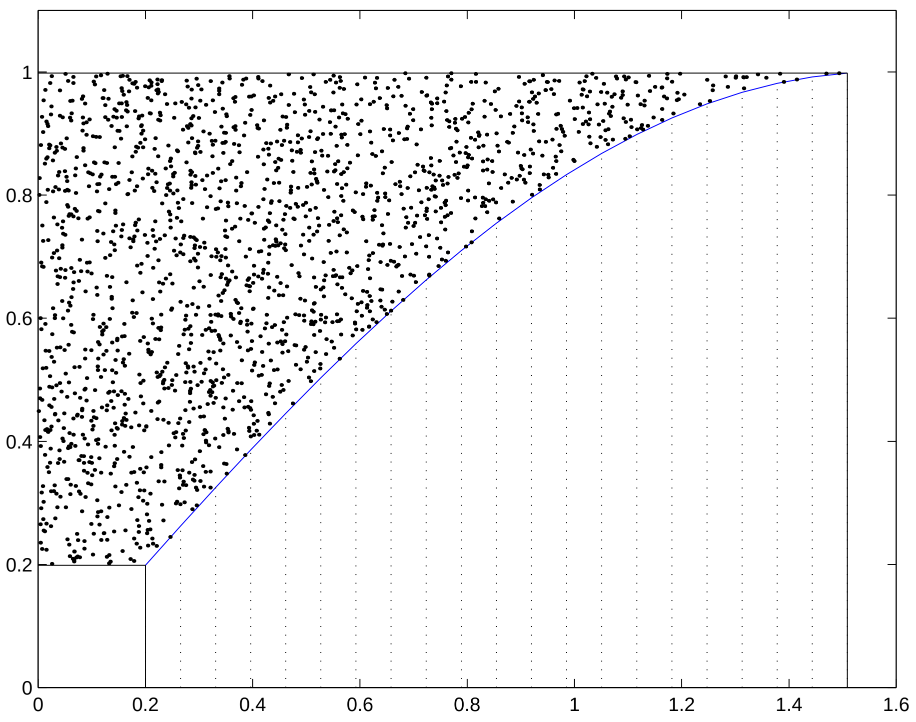
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \forall X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) \quad \operatorname{lin}(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda \operatorname{lin}(X_1) + \mu \operatorname{lin}(X_2)$$

und $R(X)$ sei der Restterm (die Abweichung, der Fehler), für den gilt:

$$\exists C > 0\ \exists \delta > 0\ \forall X \in \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) \,:\, \|X\| < \delta \Rightarrow \|R(X)\| \le C\|X\|^2.$$

Wie bei (reellen oder komplexen) Polynomen brauchen Sie sich mit δ nicht viel Mühe zu geben, und ebenfalls wie bei den schon behandelten Polynomen hängt C von der Stelle A und von der Wahl von δ ab. Beachten Sie, daß i.a. $AX \neq XA$!!
Man schreibt auch manchmal $R(X) = O(\|X\|^2)$ statt $\|R(X)\| \le C\|X\|^2$.

Puzzle: Können Sie die Ableitung einer Funktion $f : \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ definieren?



Zu 13.2 (b). Das Integral von $\int_a^b \varphi$ ist gestreift veranschaulicht, mit $A = \varphi(a)$, $B = \varphi(b)$ veranschaulicht die punktierte Fläche das Integral $\int_A^B \varphi^{-1}$. Man kann also 13.2 (b) schon mal glauben, das erleichtert den Beweis.

Analysis I

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 14.1 Differenzierbarkeit von Produktkurven

Seien $(V, |\,|_V)$ und $(W, |\,|_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei $\Pi : V \times V \to W$ eine bilineare Abbildung. Es gebe weiterhin ein $C > 0$, so daß für alle $v, \widetilde{v} \in V$ die Abschätzung

$$|\Pi(v, \widetilde{v})|_W \leq C|v|_V |\widetilde{v}|_V$$

gilt. Jede solche Abbildung nennen wir **Produkt**, z.B. Skalarprodukt, Kreuzprodukt, Matrixprodukt ... Für $a < b$ seien außerdem $f_1, f_2 : (a, b) \to V$ zwei auf (a, b) differenzierbare Kurven. Zeigen Sie, daß dann auch die Produktkurve $\Pi(f_1, f_2) : (a, b) \to W$ (definiert durch $\Pi(f_1, f_2)(t) := \Pi(f_1(t), f_2(t))$) auf (a, b) differenzierbar ist und daß die Ableitung gegeben ist durch

$$(\Pi(f_1, f_2))' = \Pi(f_1', f_2) + \Pi(f_1, f_2').$$

Aufgabe 14.2 Stetige Funktionen und dichte Mengen

(a) Seien f und g zwei **stetige** Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die auf $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, d.h.

$$\forall\, q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = g(q).$$

Zeigen Sie, daß die Funktionen dann schon gleich sind, also für alle $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.

(b) Sei h eine auf $\mathbb{Q}$ definierte reellwertige Funktion, die auf $\mathbb{Q}$ Lipschitz-stetig mit Dehnungskonstante L ist, d.h.

$$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \text{ und } \forall\, p, q \in \mathbb{Q} \quad |h(p) - h(q)| \leq L|p - q|.$$

Zeigen Sie, daß es eine eindeutige stetige Fortsetzung von h auf $\mathbb{R}$ gibt, und daß diese Fortsetzung wieder Lipschitz-stetig mit Konstante L ist, d.h. ($\exists!$: "es gibt genau ein")

$$\exists!\ H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ H|_{\mathbb{Q}} = h\ ,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |H(x) - H(y)| \leq L|x - y|.$$

Aufgabe 14.3 Partielle Integration und Substitution

(a) Zeigen Sie, daß die Funktion $x^n e^x$ eine Stammfunktion der Form $P_n(x) \cdot e^x$ besitzt, wobei $P_n(Y) = \sum_{i=0}^n a_{i,n} Y^n$ ein Polynom n-ten Grades ist. Geben Sie eine Formel für $a_{i,n}$ an, zuerst für $n = 1$, dann weiter mit Induktion. (Tip: Überschrift)
(b) Differenzieren Sie $\log \circ f$ und finden Sie damit eine Stammfunktion für tan. Differenzieren Sie $\arctan \circ f$ und finden Sie eine Stammfunktion für

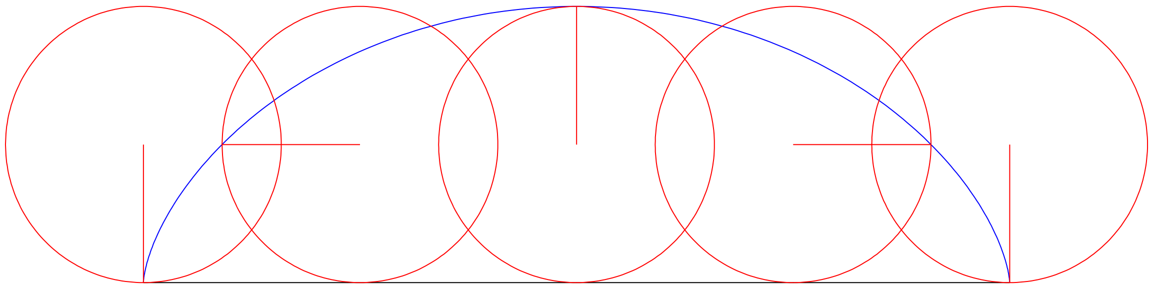
$$x \mapsto \frac{x}{(2 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}.$$

Aufgabe 14.4 Die Beschreibung des rollenden Rades

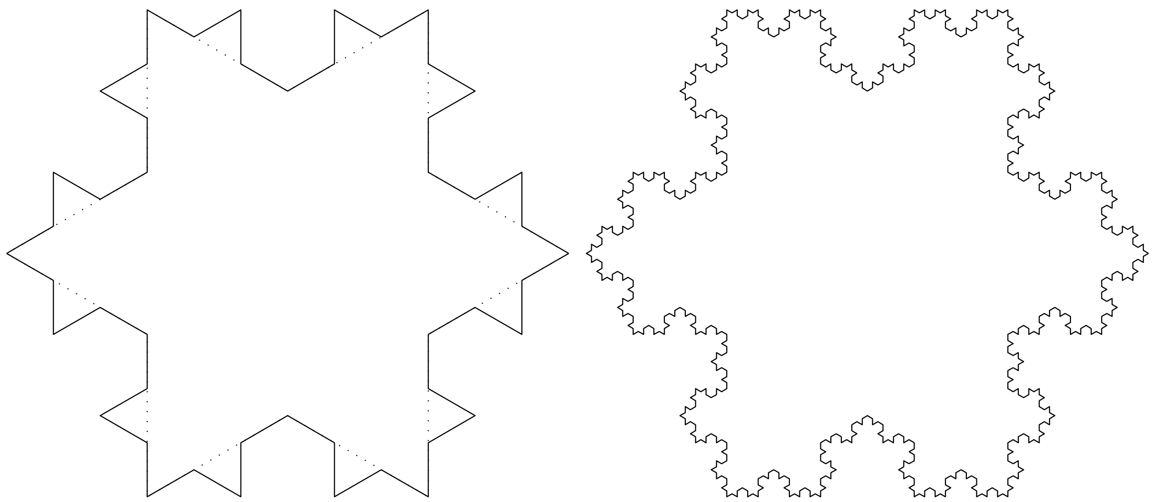
Wir nennen die Kurve $\mathrm{roll}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{roll}(t) := r\cdot(\omega t+\sin(\omega t), 1-\cos(\omega t)),\quad r=1$$

Rollkurve oder Zykloide, denn sie beschreibt die Bewegung eines Punktes auf dem Rand eines auf der x-Achse mit der Geschwindigkeit $r\omega$ rollenden Rades. Geben Sie zu jedem Zeitpunkt t die Weglänge an, die dieser Punkt zurückgelegt hat, d.h. berechnen Sie die euklidische Bogenlänge der Rollkurve bis zum Zeitpunkt t. (Tip: Sie können das Ihnen bekannte Additionstheorem $1+\cos\alpha = 2(\cos\frac{\alpha}{2})^2$ verwenden, und den Satz des Pythagoras.)



Zu Aufg. 14.4, eine Zykloide mit fünf Positionen des rollenden Rades.



Zwei Approximationen der ϵ-δ-stetigen *Kochsche* Schneeflockenkurve.
Zu $\epsilon = 3^{-n}$ ist $\delta = 4^{-n}$ eine geeignete Wahl. Diese Kurve ist nirgends differenzierbar. Sie besitzt jedoch eine differenzierbare Stammfunktion. Die Länge wird mit jedem Approximationsschritt um den Faktor 4/3 länger, links sind die zwei ersten Schritte gezeigt, rechts die Aproximation zwei Schritte weiter.