# Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

*Bitte nehmen Sie nicht nur zum Vergnügen an der Klausur teil, sondern weil Sie den Schein erwerben wollen;* **Termin: Fr 23.1.04, 8:00 - 10:00. Anmeldung:** *Wegen der benötigten Sitzplätze melden Sie sich bitte im Verlauf dieser Woche bei Ihrem Tutor zur Klausur an.*

## Aufgabe 8.1 Iterierte Integrale

Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Fubini?

– Vgl. Königsberger, Analysis 2, 8.6 für die beiden nächsten Aufgaben. –

## Aufgabe 8.2 Ausnahmemengen sind (möglichst) Nullmengen

Seien $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ meßbare Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(A_k) < \infty,$$

wobei $v$ das Volumen bzw. das Lebesgue-Maß einer Menge sein soll. Zeigen Sie, daß fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in höchstens endlich vielen $A_k$ enthalten sind. Wir betrachten also die $x$, die in unendlich vielen $A_k$ liegen, als Ausnahmepunkte.
(Tip: Zeigen Sie, daß die Funktion $f = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k}$ integrierbar ist.)

## Aufgabe 8.3 Unbeschränkte Integranden

Die folgenden Integrale sollen wieder mit verallgemeinerten Riemannsummen in 1-dimensionale ("radiale") Integrale verwandelt werden. Dies brauchen Sie nicht aufzuschreiben, wenn Sie eine der beiden früheren Aufgaben zu diesem Thema mit richtiger Argumentation bearbeitet haben. Dagegen soll das Ausschöpfungsargument sorgfältig bearbeitet werden.

(a) Benutzen Sie Ausschöpfungen mit konzentrischen Kugeln $K_r(0)$, um zu zeigen, daß das Integral

$$\int_{K_1(0)} \frac{dx}{\sqrt{1-\langle x,x\rangle}}, \qquad K_1(0) \subset \mathbb{R}^n,$$

existiert. Berechnen Sie das Integral für $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Benutzen Sie Ausschöpfungen mit konzentrischen Kugelschalen $K_R(0) \setminus K_r(0)$, um festzustellen, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := 1/(1 + \langle x,x\rangle^a)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist.

## Aufgabe 8.4 Lichtwege

Sei $c : \mathbb{R}^3 \to [1, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. $c(x)$ heiße Brechungsindex an der Stelle $x$. Wir betrachten den Raum $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ der stetig differenzierbare Kurven im $\mathbb{R}^3$. Wie wir in Aufgabe II.2.2 gesehen haben, ist dieser Raum zusammen mit der Norm

$$\|f\|_{C^1} := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| + \sup_{t\in\mathbb{R}} |f'(t)|$$

vollständig. Wir definieren das Energiefunktional $E : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ durch

$$E(f) := \frac{1}{2}\int_0^T c^2(f(t))f'(t)^2 dt.$$

(a) Berechnen Sie $\frac{d}{ds}E(f + sv)|_{s=0}$ für $f, v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Diese Richtungsableitung wird auch erste Variation von $E$ bei $f$ in Richtung $v$ genannt.

Wir definieren den Begriff Lichtweg durch folgendes Variationsprinzip: $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ heißt Lichtweg, wenn für alle $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit $v(0) = 0 = v(T)$ die Bedingung

$$\frac{d}{ds}E(f + sv)|_{s=0} = 0$$

erfüllt ist. (Also so, als ob Sie $f$ als Extremwert von $E$ suchen. Die 1-dimensionale Kurvenschar $f_s(t) = f(t) + sv(t)$ hat von $s$ unabhängige Endpunkte.)

(b) Wenn $f$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve ist und die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$(c \circ f) \cdot f'' + 2\langle \operatorname{grad} c|_f, f'\rangle \cdot f' - |f'|^2 \operatorname{grad} c|_f = 0,$$

so zeigen Sie mit partieller Integration, daß die Bedingung aus (a) für alle $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ mit $v(0) = 0 = v(T)$ erfüllt ist.
(b*) Falls $f$ ein dreimal stetig differenzierbarer Lichtweg ist, so können Sie die Differentialgleichung (b) aus der Variationsbedingung (a) folgern.

(c) Für Lösungen von (b) gilt: $c(f(t))^2 \cdot \langle f'(t), f'(t)\rangle = const.$

(d) Wir definieren die Lichtweglänge $L : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ durch

$$L(f) := \int_0^T c(f(t)) \cdot |f'(t)| dt.$$

Zeigen Sie die Ungleichung $L^2(f) \leq 2T \cdot E(f)$, wobei Gleichheit eintritt, falls (c) gilt.

(e) Wenn $f$ monoton wachsend reparametrisiert wird, ändert sich $L(f)$ nicht, aber $E(f)$ kann sich ändern. ($L(f)$ ist ein Kurvenintegral, $E(f)$ nicht.)