Differentialgeometrie I

Aufgabe 9.1 (Frenetgleichungen auf Rotationsflächen)
Bezeichnungen wie in der Formelsammlung zu 8.1.

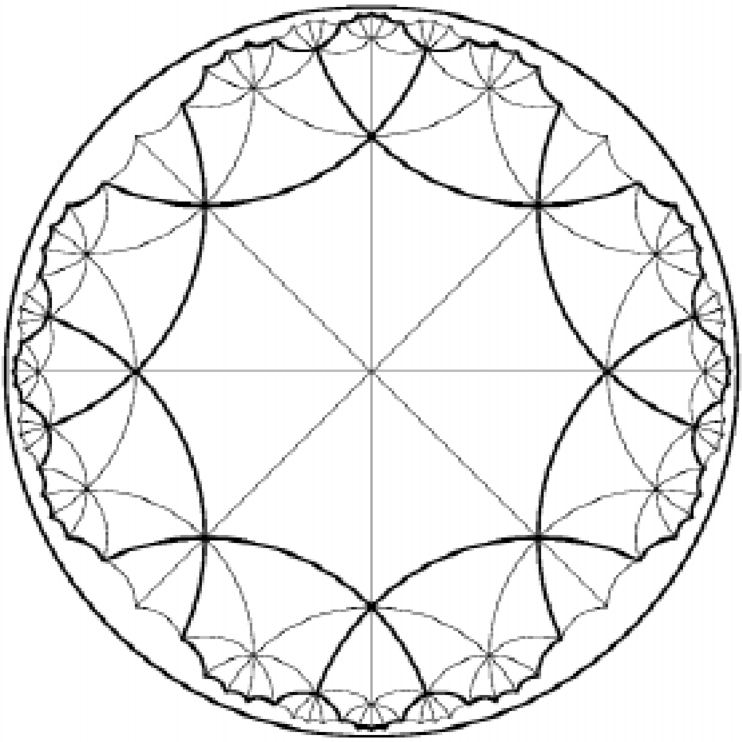
(a) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise einer Rotationsfläche, sowohl durch Differenzieren der Normale wie auch mit Hilfe der Christoffelabbildung Γ. Die zweite Rechnung liefert auch die geodätische Krümmung von Kreisen in der Hyperbolischen Ebene, $\kappa_g = \coth r$, warum?
(b) Schreiben Sie die Frenetgleichungen für eine Kurve der gegebenen geodätischen Krümmung $\kappa_g(t)$ im Definitionsbereich der Parametrisierung F einer Rotationsfläche auf.
(c) Warum ist eine Lösungskurve dieser Gleichungen eine Kurve, die die gegebene Krümmungsfunktion $\kappa_g(t)$ als geodätische Krümmung hat?

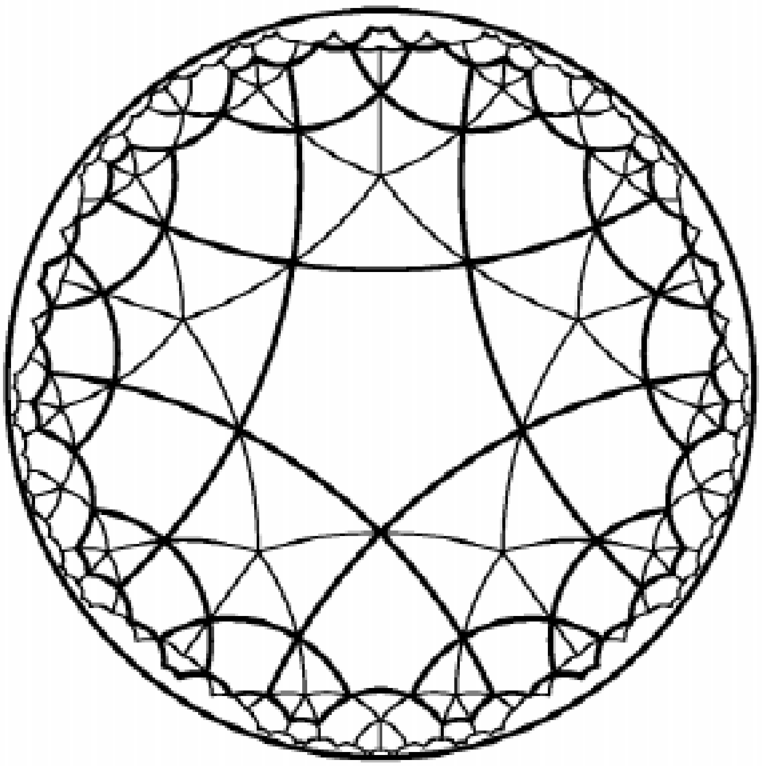
Hyperbolische Ebene.
Die hyperbolische Ebene wurde eingeführt als die Riemannsche Geometrie auf einer Schale des Hyperboloids $\{(x_0, x_1, x_2);\ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1\}$.
Die Lorentzbilinearform ist $\langle v, w\rangle^L := -v_0w_0 + v_1w_1 + v_2w_2$.
Die Polarkoordinatenparametrisierung ist: $(r, \varphi) \mapsto (\cosh r, \sinh r \cos\varphi, \sinh r \sin\varphi)$.
Die linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\langle Av, Aw\rangle^L = \langle v, w\rangle^L$ sind Isometrien der Hyperbolischen Ebene.

Aufgabe 9.2 (Evolventen in der Hyperbolischen Ebene)
(a) Es seien $p, v \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\langle p, p\rangle^L = -1, \langle p, v\rangle^L = 0, \langle v, v\rangle^L = +1$.
Zeigen Sie, daß $c(s) := p \cdot \cosh s + v \cdot \sinh s$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Hyperbolischen Ebene ist. Ferner: Die Kurve liegt in einem 2-dimensionalen Vektorunterraum des $\mathbb{R}^3$, ist also eine Geodätische.
(b) Verallgemeinern Sie Aufgaben 3.3, 3.4 in die Hyperbolische Ebene: Durch was für eine Formel wird die Fadenevolvente beschrieben? Warum ist die Länge des abgewickelten Fadens der Krümmungsradius der Evolvente?

Aufgabe 9.3 (Ellipsen in der Hyperbolischen Ebene)
Betrachten Sie einen Kreis vom hyperbolischen Radius $2a$ um $F_1 = (-1, 0, 0)$ und darauf einen beliebigen Punkt $P(\varphi)$. Wählen Sie außerdem einen Punkt $F_2 := (\cosh 2e, \sinh 2e, 0)$ mit $2e < 2a$. Wir definieren die Ellipse mit den Fokalpunkten F_1, F_2 und der Abstandssumme $2a$ der Kurvenpunkte von den Fokalpunkten. Wir wollen die euklidische Ellipsenkonstruktion von Blatt 1 in die Hyperbolische Ebene verallgemeinern und rechnerisch nachvollziehen, wenn auch nur als Anleitung zum numerischen Rechnen. (Sie sollen nicht versuchen, die Gleichungen von Hand aufzulösen. 9.2(a) wird vorausgesetzt. Wiederholen Sie, wie Sie die folgenden Fragen auf $\mathbb{S}^2$ beantworten würden und modifizieren Sie die Antwort.)

(a) Wie kann man den Mittelpunkt $M(\varphi)$ zwischen F_2 und $P(\varphi)$ berechnen und wie den Tangenteneinheitsvektor $T(\varphi)$ in $M(\varphi)$ der Geodätischen von F_2 über $M(\varphi)$ nach $P(\varphi)$?
(b) Wie kann man einen zu $T(\varphi)$ senkrechten Tangentialvektor $n(\varphi)$ der hyperbolischen Ebene finden und wie mit seiner Hilfe die Mittelsenkrechte zwischen F_2 und $P(\varphi)$ hinschreiben?
(c) Warum schneidet die Mittelsenkrechte aus (b) den Kreisradius $F_1P(\varphi)$ in einem Ellipsenpunkt $E(\varphi)$ und warum verläuft die Mittelsenkrechte im übrigen außerhalb der Ellipse?





Zwei **platonische Pflasterungen** der hyperbolischen Ebene: Im oberen Bild mit gleichseitigen 45°-Dreiecken, von denen sich acht (um eine Ecke herum) zu einem regelmäßigen Achteck zusammensetzen; im unteren Bild aus 90°-Fünfecken sowie doppelt so großen (dünner gezeichneten) 72°-Fünfecken. – Das obere Bild führt durch Identifizierung zu einer platonischen Fläche vom Geschlecht 2: Lege zwei der Achtecke übereinander und identifiziere jedes zweite Paar übereinander liegender Kanten. Danach hat man eine Sphäre mit vier paarweise gegenüber liegenden Löchern. Identifiziere jedes Löcher-Paar zu einer Sphäre mit zwei Henkeln. (*platonisch* heißt: Jede Symmetrie einer Pflasterkachel liefert eine Symmetrie der geschlossenen Fläche.)