Felix Hausdorff and the Foundations of Mathematics

by Peter Koepke

Universität Bonn, Germany

Amsterdam, September 20, 2011

Hausdorff's works

I. Mengenlehre (in preparation)

II. Grundzüge der Mengenlehre (2002)

III. Deskriptive Mengenlehre und Tolopogie (2008)

IV. Analysis, Algebra und Zahlentheorie (2001)

V.Angewandte Mathematik (2005)

VI. Geometrie, Raum und Zeit (in preparation)

VII. Philosophisches Werk (2004)

VIII. Literarisches Werk (2010)

IX. Korrespondenz (in preparation)

Major contributions to set theory

- 1901: one of the first lecture courses on set theory at Leipzig (Vol. I)
- 1904: regular and singular cardinals; the recursion formula: $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$
- 1907/08: ordered sets; *saturated* ordered sets; generalized continuum hypothesis; inaccessible ("exorbitant") cardinals
- 1909: HAUSDORFF gaps
- 1914: *Grundzüge der Mengenlehre* (HAUSDORFF paradox, axiom system for general topological spaces)
- 1916: Perfect subset property for BOREL sets
- 1927: *Mengenlehre* (2nd edition of *Grundzüge*), first textbook on descriptive set theory
- 1935: *Mengenlehre* (3rd edition)

HAUSDORFF's notion of set

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding. (A set is a collections of things into a whole, i.e., into a new thing.) (*Grundzüge*, 1)

Hausdorff's notion of set

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding. (A set is a collections of things into a whole, i.e., into a new thing.) (*Grundzüge*, 1)

Cantor, 1895:

> Unter einer ‚Menge' verstehen jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Hausdorff's "axioms"

– Zwei Mengen A, B werden dann und nur dann als gleich betrachtet ($A = B$), wenn sie genau dieselben Elemente enthalten, ...
(Two sets A, B are considered as equal ($A = B$), if and only if they contain the same elements, ...)

– ..., lassen wir auch eine Menge 0, die *Nullmenge*, zu, die kein Element hat; ... .

(we also admit a set 0, the null set, which has no element; ... .)

HAUSDORFF's "axioms"

– A und B seien zwei beliebige Mengen. Unter ihrer *Summe*

$$S = \mathfrak{S}(A, B)$$

verstehen wir die Menge der Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen angehören.
(Let A and B be two arbitrary sets. By their *sum*

$$S = \mathfrak{S}(A, B)$$

we mean the set of those elements which belong to at least one of the two sets.)

HAUSDORFF's "axioms"

– Als das *Produkt*

$$\mathop{\mathfrak{P}}_{i}^{J} A_i = A_i\, A_k\, A_l \ldots .$$

definieren wir die Menge aller *Elementenkomplexe*, die in dem Mengenkomplex enthalten sind, d.h. aller Elementenkomplexe $(a_i,\ a_k,\ a_l,\ \ldots.)$, für die jedes a_i ein Element von A_i ist; ... .
(As the *product*

$$\mathop{\mathfrak{P}}_{i}^{J} A_i = A_i\, A_k\, A_l \ldots .$$

we define the set of all sequences of elements which are contained in the sequence of sets, i.e., all sequences $(a_i, a_k, a_l, \ldots.)$, for which every a_i is an element of A_i; ... .)

HAUSDORFF's "axioms"

- Die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der Punkte des Raumes sind die nächstliegenden Beispiele unendlicher Mengen.
  (The set of natural numbers, the set of points in space are the most obvious examples of infinite sets.)

- Zur Unterstützung dieser zeitlosen Auffassung hat E. Zermelo den glücklichen Gedanken gehabt, von vornherein aus *jeder* von Null verschiedenen Teilmenge A' von A eins ihrer Elemente

  $$a' = f(A')$$

  auszuwählen, ...
  As a support of this timeless perception E. Zermelo had the felicitous thought to choose right away from *every* subset A' of A different from null one of its elements

  $$a' = f(A'),$$

Set theory as a foundation of mathematics

Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; (Set theory is the foundation of all of mathematics)

Set theory as a foundation of mathematics

Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; (Set theory is the foundation of all of mathematics)

Die vollständige Mengenlehre hat auch die Theorie der endlichen Mengen *ab ovo* zu entwickeln, also die gewöhnliche Arithmetik und ihre Erweiterungen zu begründen. Wir verzichten bei unserer Darstellung auf diesen Teil des Programms, der ja auch vor und außerhalb der Mengenlehre genügend behandelt worden ist, und setzen das System der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen als bekannt voraus.

(The complete set theory also has to develop the theory of finite sets *ab ovo*, thus is has to constitute common arithmetic and its extensions. In our presentation we omit this part of the program which has been sufficiently treated before and outside of set theory, and we take the system of natural, integer, rational and complex numbers for granted.)

Ordered pairs

[...] wir können das *geordnete Paar*

$$p=(a,b)$$

bilden, [...] Zwei geordnete Paare $p=(a,b)$ und $p'=(a',b')$ gelten dann und nur dann als gleich, wenn $a=a'$, $b=b'$.

([...] we can form the *ordered pair*

$$p=(a,b),$$

[...] Two ordered pairs $p=(a,b)$ and $p'=(a',b')$ are considered as equal if and only $a=a'$, $b=b'$.)

Ordered pairs

Übrigens läßt sich, wenn man will, der Begriff des geordneten Paares auf den Mengenbegriff zurückführen. Sind 1, 2 zwei verschiedene wie von a und b verschiedene Elemente, so hat das *Paar von Paaren*

$$\{\{a,1\},\{b,2\}\}$$

genau die formalen Eigenschaften des geordneten Paares (a,b).

(Incidentally the notion of ordered pair can be, if one wishes, reduced to the notion of set. If $1, 2$ are two distinct elements that are also distinct from a and b, the the *pair of pairs*

$$\{\{a,1\},\{b,2\}\}$$

has exactly the formal properties of the ordered pair (a,b).)

Functions

> Der Funktionsbegriff ist fast ebenso fundamental und ursprünglich wie der Mengenbegriff. (The notion of function is almost as fundamental and primal as the notion of set.)

After functions have already been used at earlier places, HAUSDORFF also consideres functions as sets of ordered pairs:

> Zwei solche Funktionen $f(a)$, $f'(a)$ sehen wir dann und nur dann als gleich an, wenn die zugehörigen Paarmengen P, P' gleich sind, wenn also, für jedes a, $f(a) = f'(a)$ ist.
>
> (We consider two such function $f(a)$, $f'(a)$ to be equal if and only if the associated sets of pairs P, P' are equal, i.e. if for every a, $f(a) = f'(a)$.

Hausdorff on logical exactness and completeness

[...] in einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel, sich und den Leser vor Täuschungen zu bewahren.

[...] in an area, where plainly nothing is self-evident, and where the correct often is paradoxical and the plausible is false, there is no way except the gap-less deduction to save oneself and the reader from deceptions.

Paradoxes and axioms

Grundzüge:

> Da indessen diese [Zermelos] äußerst scharfsinnigen Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen gelten können und da eine Einführung des Anfängers in die Mengenlehre auf diesem Wege mit großen Schwierigkeiten verbunden sein dürfte, so wollen wir hier den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber tatsächlich die Beschränkungen innehalten, die den Weg zu jenem Paradoxon abschneiden. (GZ, p.2)
>
> (Since these [Zermelo's] exceedingly subtle examinations cannot be considered complete and since the introduction to set theory of the beginner along these lines will be connected with big difficulties, we want to admit the naive notion of set, but observing the restrictions which cut off the way to that paradox.)

Paradoxes and axioms

Mengenlehre:

> [...] die Mengenlehre ist auf neuer (axiomatischer) Grundlage so aufzubauen, daß Antinomien ausgeschlossen sind. Wir können auf die dahin zielenden von E. Zermelo begonnenen und sicheren Erfolg versprechenden Untersuchungen in diesem Buche nicht eingehen und müssen unseren "naiven" Mengenbegriff festhalten. (ML, P.34)

> (set theory has to be built on new (axiomatic) foundations, so that antinomies are excluded. In this book we cannot deal with the investigations aiming towards that goal which were started by E. Zermelo and which promise sure success, and we must hold on to our "naive" notion of set.)

Foundational developments during HAUSDORFF's times

FELIX HAUSDORFF		Logic and Set Theory
born in Wroclaw	Nov. 8, 1868	
	Dec. 12, 1873	GEORG CANTOR: uncountability of the reals
Promotion Leipzig	1891	
Habilitation Leipzig	1895	CANTOR: *Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*
Sant' Ilario, Gedanken aus der Landschaft Zarathustras	1897	
	1897	1. ICM, Zurich
Das Chaos in kosmischer Auslese	1898	
	1900	2. ICM, Paris, HILBERT's problem

Foundational developments

Felix Hausdorff		Logic and Set Theory
First set theoretic paper	1901	
First set theory course		
	1902	Russell's paradox
	1903	Russell: *Principles of Mathematics*
	1904	Zermelo: Proof of the wellordering theorem
Review of the *Principles*	1905	
	1908	Zermelo: Axiom for set theory
Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen	1908	
Professor at Bonn	1910	
Full Professor at Greifswald	1913	
Grundzüge der Mengenlehre	1914	
	1917	Mirimanoff: Axiom of foundation
	1918	Brouwer: Set theory without *tertium non datur*
Full Professor at Bonn	1921	

Foundational developments

Felix Hausdorff		Logic and Set Theory
	1921	Weyl: Grundlagenkrise
	1922	Fraenkel: Axiom of replacement
	1922	Fraenkel: Independence of axiom of choice
Mengenlehre (2nd edition)	1927	
	1928	Hilbert discharges Brouwer as editor of the *Mathematische Annalen*
	1929	Gödel: Completeness Theorem
	1930	Gödel: Incompleteness Theorems
	1930	End of the Grundlagenkrise?
Mengenlehre (3rd edition)	1935	
	1938	Gödel: Consistency of GCH
Suicide with his wife and his sister in law at Bonn, to avert deportation	Jan.26, 1942	

Chaos

HAUSDORFF -PAUL MONGRÉ (1898):

Das Chaos in kosmischer Auslese - Ein erkenntnisskritischer Versuch (Chaos in cosmic selection - An epistomological attempt)

Chaos

HAUSDORFF -PAUL MONGRÉ (1898):

Das Chaos in kosmischer Auslese - Ein erkenntnisskritischer Versuch (Chaos in cosmic selection - An epistomological attempt)

> Damit sind die Brücken abgebrochen, die in der Phantasie aller Metaphysiker vom Chaos zum Kosmos herüber und hinüber führen, und ist das *Ende der Metaphysik* erklärt, – der eingeständlichen nicht minder als jener verlarvten, die aus ihrem Gefüge auszuscheiden der Naturwissenschaft des nächsten Jahrhunderts nicht erspart bleibt.
>
> (Thus the bridges are dismantled that in the phantasy of all metaphysicists lead back and forth between chaos and cosmos, and the *end of metaphysics* is declared, - the obvious not less than that hidden, which the natural science of the next century cannot help but to eliminate from its system.)

Hausdorff's formalism

Review of Bertrand Russell's *The Principles of Mathematics. Vol. I* (1905)

> [...] *Formalismus* [...], der in immer wachsender Bestimmtheit und Bewusstheit die moderne Mathematik beherrscht; [...] Formalismus, der ursprünglich nichts weiter will als die Voraussetzungen jeder Deduktion ausdrücklich hervorheben und nebelhafte Berufungen auf scheinbar Selbstverständliches vermeiden, der in seiner weiteren Entwicklung zur völligen Emanzipation von der "Anschauung" und sonstigen spezifischen, ausserlogischen Erkenntnisquellen geführt hat, und der in seiner gegenwärtigen Gestalt zugleich eine Pflicht und ein Recht der reinen Mathematik bezeichnet: die Pflicht, nirgends auf die zufällige aktuelle Bedeutung der Objekte und ihrer Verknüpfungen zu rekurrieren, sondern aus präzise angegebenen undefinierten Begriffen und undeduzierten Urteilen (Axiomen) alles Uebrige zu definieren und zu deduzieren, und das Recht, einem solchermassen rein logisch aufgebauten System von Dingen und Beziehungen jede logisch zulässige Interpretation zu geben.

HAUSDORFF's formalism

([...] *formalism* [...], which dominates modern mathematics in an ever growing determinateness and consciousness; [...] formalism which originally only intends to clearly bring out the premises of each deduction and to avoid nebulous appeals to the seemingly self-evident, and which in its further development has lead to the complete emancipation from "intuition" and other specific, extra-logical sources of knowledge, and which in its present form also defines a duty and a right of pure mathematics: the duty, never to recurr onto the accidental actual meaning of the objects and their relation, but to define and deduce from precisely given undefined notions and undeduced judgments (axioms) everything else, and the right to give such a logically built system of things and relations every logically admissable interpretation.)

Against logicism

Russell review:

> Ein scholasischer Scharfsinn, der eingebildete Probleme sieht und die wirklichen übersieht, feiert in diesem Werke seine Orgien der Subtilität. [...] ein anstrengendes Spiel mit selbstgeschaffenen Schwierigkeiten [...]
>
> (In this book, a scholastic sharpmindedness which sees imagined problems and misses the real problems celebrates its orgies of subtility. [...] a difficult game with self-created difficulties [...])

Against logicism, and against symbolic logic?

Russell review:

> Ein scholasischer Scharfsinn, der eingebildete Probleme sieht und die wirklichen übersieht, feiert in diesem Werke seine Orgien der Subtilität. [...] ein anstrengendes Spiel mit selbstgeschaffenen Schwierigkeiten [...]
>
> (In this book, a scholastic sharpmindedness which sees virtual problems and misses the real problems celebrates its orgies of subtility. [...] a difficult game with self-created difficulties [...])

Against intuitionism

Letter to Fraenkel:

> Es ist Ihnen sogar geglückt, die Orakelsprüche der Herren Brouwer und Weyl verständlich zu machen - ohne dass sie mir nun weniger unsinnig erscheinen! Sowohl Sie als auch Hilbert behandeln den Intuitionismus zu achtungsvoll; man müsste gegen die sinnlose Zerstörungswuth dieser mathematischen Bolschewisten einmal gröberes Geschütz auffahren.
>
> (You even managed to make the oracle works of Brouwer and Weyl understandable - without making them less nonsensical to me! You as well as Hilbert are treating intuitionism to politely; one really should deploy stronger weapons against the senseless destructiveness of these mathematical Bolchevists.)

Symbolic logic

HAUSDORFF

- knew PEANO's formalism
- doesn't use symbolic logic except symbols like $\in$
- ignores symbolic logic after *Principles*
- misses work which critically depends on formal logic: RUSSELL-WHITEHEAD, SKOLEM, FRAENKEL, GÖDEL

Hausdorff's scientific ethos

Sant' Ilario:

> ... ich für meine Person sehe in der Ehrfurcht vor sich selbst als einem **Schaffenden** das höchste Ethos, das auf Erden erreichbar ist.
>
> Die Wissenschaft, die eine befestigte Gewissheit an die Spitze der Güter stellt ist ein Zeichen für die bleiche Furcht, die Scheu for dem problematischen Charakter des Daseins.
>
> (.. by myself I consider the reverence for oneself as a **Creator** the highest ethos, that can be attained on earth.
>
> A science which puts an fixed certainty at the top of things is a sign of blank fear and of the dread of the problematic character of being.)

Von meiner Nacktheit hobest Du den Schleier
Und zeigtest, wie im Grau'n Medusa thront.
Nach Hause scheuchst Du die erschreckten Freier,
Das Liebesmüh'n um mich bleibt unbelohnt.
Nun werd' ich wohl von ihrem Brunstgeleier
Wie sie von meinem Schauderblick verschont:
    Sie mögen, drängt es sie nach Leibeserben,
    Um Wissenschaft, die Erdentochter, werben!