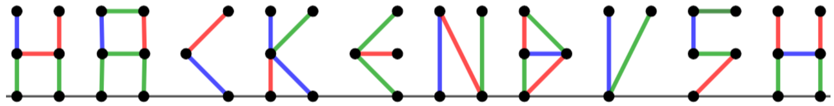


Bonner Zentrum für Lehrerbildung (BZL)

**Theorie kombinatorischer Spiele für
Mathematik-Lehrkräfte**

Masterarbeit

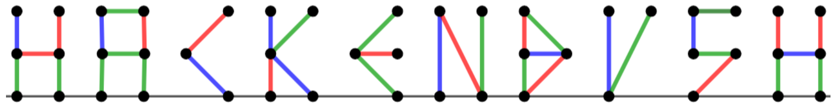
vorgelegt von Leif Thiemann und Gereon Lanzerath

Matrikelnummer: 2222905, 2965372

Dozentin: Dr. Regula Krapf

Sommersemester 2022

Bonn, den 26. September 2022



Bonner Zentrum für Lehrerbildung (BZL)

Theorie kombinatorischer Spiele für Mathematik-Lehrkräfte

Masterarbeit

vorgelegt von Leif Thiemann und Gereon Lanzerath

Matrikelnummer: 2222905, 2965372

Dozentin: Dr. Regula Krapf

Sommersemester 2022

Bonn, den 26. September 2022

Eigenständigkeitserklärung

Wir versicheren hiermit, dass die Masterarbeit mit dem Titel „Theorie kombinatorischer Spiele für Mathematik-Lehrkräfte“ von uns selbst und ohne jede unerlaubte Hilfe selbstständig angefertigt wurde, dass sie noch an keiner anderen Hochschule zur Prüfung vorgelegen hat und dass sie weder ganz noch in Auszügen veröffentlicht worden ist. Die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten, Abbildungen usw. -, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, haben wir in jedem Fall kenntlich gemacht.

Bonn, den 26. September 2022

G. Lanzerath

Leif [illegible]

Aufteilung der Arbeit

Die Aufteilung der Arbeit ist als reine Formalität zu betrachten, wir haben beide an jedem Kapitel mitgewirkt. Dies ist dem inhaltlichen Aufbau der Arbeit geschuldet, da die einzelnen Kapitel aufeinander aufbauen. Wir ordnen die Kapitel folgenderweise zu:

Leif Thiemann:
2.1; 2.2; 3.2; 3.3; 3.5; 4.2; 5.2; 6.3; 6.4; 6.5; 7.1
Gereon Lanzerath:
1; 2.3; 2.4; 3.1; 3.4; 4.1; 4.3; 5.1; 6.1; 6.2; 7.2; 7.3

Weiterhin sind die Lösungen der Aufgaben als zu den jeweiligen Kapiteln zugehörig anzusehen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Vorwort

1.1 Ziele dieser Arbeit

Diese Arbeit richtet sich primär an Mathematiklehrkräfte als Zielgruppe. Es geht darum, diesen die kombinatorische Spieltheorie „schmackhaft“ zu machen. Zwar sind Mathematiklehrkräfte durch die Lehrpläne stark reglementiert, was die Auswahl der fachlichen Inhalte im Schulunterricht angeht, trotzdem können mitunter andere Inhalte, oder aber Inhalte in anderer Form in den Unterricht eingebracht werden. Die Theorie kombinatorischer Spiele könnte so ein Inhalt sein, der möglicherweise im Unterricht, oder ggf. in AG's oder der Begabtenförderung behandelt werden könnte. Für Lehrer*innen kann es schwierig sein, sich neben dem Schulalltag fachlich weiterzubilden, insbesondere dann, wenn die Fachliteratur sich nicht primär an Lehrkräfte, sondern an Fachmathematiker richtet. Mit dieser Arbeit wollen wir Mathematiklehrkräften die Möglichkeit geben, sich in ein neues Thema einzuarbeiten, ohne mit den Schwierigkeiten der oben genannten Fachliteratur konfrontiert zu werden.
Die nötigen fachlichen Hintergründe, um das Thema im Unterricht behandeln zu können, sollen dabei vollständig erläutert werden, sodass kein weiteres Nachschlagewerk benutzt werden muss. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es, dass sie möglichst einfach zu lesen sein soll. Die Sachverhalte werden nicht einfach definiert und deren Eigenschaften bewiesen, sondern die verschiedenen Begriffe werden motiviert und es gibt viele Beispiele, welche die unterschiedlichen Sachverhalte verdeutlichen. Die Idee ist es, dass diese Arbeit im Zug oder abends im Bett gelesen werden könnte und man das Inhaltliche trotzdem verstehen würde. Wir möchten an dieser Stelle den Leser*innen nahe legen, sich Stift und Papier (und wenn möglich auch eine*n Mitspieler*in) zur Hand zu nehmen und die vorgestellten Spiele auszuprobieren.

Aufgabe 1 Spielen Sie beim Lesen dieser Arbeit so viel wie möglich!

Passend dazu enthält diese Arbeit entsprechende Aufgaben, welche zu den vorgestellten Inhalten passen. Diese Aufgaben dienen einerseits zur Selbstkontrolle des eigenen Verständnisses der Leser*innen, andererseits als Inspiration zu Aufgaben, die eventuell für Schüler*innen geeignet wären. Das Niveau dieser Aufgaben variiert; es gibt sehr einfache, die nur die Verwendung eines neuen Begriffs/die Regeln eines neuen Spiels überprüfen, aber auch solche, die inhaltlich anspruchsvoller sind. Im letzten Kapitel finden sich zusätzlich ausführliche Musterlösungen zu den vorgestellten Aufgaben.

1.2 Wichtige Begriffe

Bevor wir in die Materie eintauchen können, müssen wir zunächst einmal die Verwendung einiger wichtiger Begriffe klären.
In dieser Arbeit geht es um kombinatorische Spiele. Doch was sind eigentlich kombinatorische Spiele? Kombinatorische Spiele sind Spiele mit folgenden Eigenschaften:

1. Es spielen genau zwei Spielende gegeneinander, diese nennen wir Blau und Rot. Sie ziehen immer abwechselnd und müssen ziehen, wenn es möglich ist.
2. Es gibt keine Zufallselemente wie beispielsweise Würfel.
3. Es gibt keinerlei verdeckte Informationen, wie beispielsweise umgedrehte Karten oder Ähnliches. Beide Spielende verfügen zu jedem Zeitpunkt über alle relevanten Informationen.
4. Ein Spiel kann nicht unentschieden enden; entweder gewinnt Blau, oder andernfalls gewinnt Rot.

Nun stellt sich nur noch die Frage, wie man ein kombinatorisches Spiel gewinnt? Im Allgemeinen ist der Sieger eines kombinatorischen Spiels derjenige, der den letzten gültigen Spielzug macht. In der sogenannten **Misere-Variante** hingegen verliert, wer auch immer den letzten gültigen Zug machen muss.

Kombinatorische Spieltheorie ist ein sehr weites Feld, darum beschränkt sich diese Arbeit auf den Spezialfall der Kurzspiele. Kurzspiele sind kombinatorische Spiele, in denen zusätzlich jeder mögliche Spielverlauf endlich ist und beide Spielende in jeder Situation immer nur endlich viele Zugoptionen haben. Eine formale Definition von Kurzspielen findet sich in Kapitel 3.

Des Weiteren werden in dieser Arbeit die Begriffe „Spiel“ und „Regelset“ benutzt. Ist von einem Spiel die Rede, so würde man umgangssprachlich vermutlich eher von einem Spielstand sprechen. Gemeint ist eine konkrete Situation in einem Spielverlauf, die die verschiedenen Zugoptionen für die beiden Spielenden enthält. Der Begriff Regelset hingegen bezieht sich eher auf die Rahmenbedingungen für solche Spiele. In einem Regelset wird festgelegt, wie Spiele aussehen können und auf welche Weise Blau und Rot in diesen Spielen ziehen können.

Blau und Rot sind in erster Linie einfach die Namen der beiden Spielenden. Da im Verlauf dieser Arbeit allerdings häufig beschrieben wird, wie diese beiden spielen könnten oder sollten, brauchen sie aus rein sprachlichen Gründen auch ein Geschlecht, auch wenn dies inhaltlich natürlich in keinster Weise relevant ist. Es ist also an der Zeit zu klären, auf welche Weise in dieser Arbeit gegendert wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir in dieser Arbeit an, dass Blau weiblich und Rot männlich ist. Sollten Situationen beschrieben werden, in denen nicht klar ist, ob Blau oder Rot zieht, sondern nur, wer zuerst zieht und wer als Zweites, so sprechen wir von der „ersten Spielerin“ und dem „zweiten Spieler“.

Ein wesentliches Ziel der kombinatorischen Spieltheorie ist es, uns zu helfen, besser zu spielen. Im Idealfall werden bestimmte Regelsets „gelöst“. Doch was bedeutet das überhaupt? Wenn wir in dieser Arbeit davon sprechen, dass ein Regelset gelöst ist, so ist damit gemeint, dass wir ein Verfahren kennen, mit welchem wir zu jedem konkret vorliegenden Spiel in effektiver Zeit berechnen können, wer dieses bei perfekter Spielweise gewinnen wird. Da die Zugoptionen (von denen es im Fall von Kurzspielen ja nur endlich viele gibt!) ja selbst wieder konkrete Spiele sind, können Blau und Rot mit so einem Verfahren die einzelnen Spiele, auf die sie ziehen können, untersuchen und auf diese Weise perfekt spielen.
Nun ist „effektive Zeit“ natürlich keine mathematisch genaue Formulierung. Wir werden diese Stelle allerdings absichtlich nicht formal konkretisieren, da wir in dieser Arbeit keine Laufzeitanalyse von Rechenverfahren betreiben. Stattdessen erklären wir kurz, was damit gemeint ist:
In Kurzspielen haben Blau und Rot jeweils endlich viele Zugoptionen. In jedem Spiel, auf das gezogen werden kann, gibt es ebenfalls nur endlich viele Optionen. Da kein unendlicher Spielverlauf möglich ist, könnte man natürlich ein konkretes Spiel lösen, indem man alle möglichen Spielverläufe untersucht. Da man zu jedem Spiel immer auch alle Spiele betrachten müsste, auf die gezogen werden kann, steigt der Aufwand dieses Verfahrens exponentiell mit der Größe des Spiels. Das ist allerdings nicht, was hier mit „effektiv“ gemeint ist. Stattdessen wollen wir ein Verfahren haben, welches maximal polynomiell von der Größe des zu untersuchenden Spiels abhängt und uns somit tatsächlich Arbeit erspart.

Ein weiterer Begriff, der in dieser Arbeit eine Rolle spielt, ist „Gewinnstrategie“ (manchmal auch „Taktik“). Eine Gewinnstrategie für Blau gibt für jeden möglichen Zug von Rot einen passenden blauen Antwortzug an, sodass Blau am Ende das Spiel garantiert gewinnt. Sollte Blau beginnen, liefert die Gewinnstrategie zusätzlich den passenden ersten Zug. Eine Gewinnstrategie für Rot ergibt sich analog.
Vorsicht: Es kann passieren, dass es eine Gewinnstrategie für Blau als erste Spielerin gibt, aber keine für den Fall, dass sie als Zweites spielt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Neben Vorwort, Ausblick und dem Kapitel mit den Lösungen der Aufgaben ist diese Arbeit in fünf inhaltliche Kapitel unterteilt. Diese bauen aufeinander auf und sollten daher auch in der entsprechenden Reihenfolge gelesen werden.

In Kapitel 2 werden zwei konkrete Regelsets für Kurzspiele vorgestellt. Es gibt insgesamt noch viele weitere. Die beiden vorgestellten geben allerdings bereits eine gute Einsicht in die Funktionsweise von Kurzspielen und ermöglichen es, die später vorgestellte Theorie mit passenden Beispielen zu illustrieren.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit mathematischen Formalitäten. Es wird der Frage auf den Grund gegangen, wie wir Kurzspiele formal definieren können und welche sinnvollen mathematischen Strukturen sich dort erkennen lassen.

In Kapitel 4 bewerten und vergleichen wir verschiedene Kurzspiele miteinander hinsichtlich dessen, wie stark sie Blau begünstigen.

Kapitel 5 hat als Ziel, eine möglichst komfortable mathematische Notation von Kurzspielen zu finden, die uns in Kapitel 6 das Leben erleichtern soll.

In Kapitel 6 weisen wir Kurzspielen konkrete Werte zu, mit denen wir im Idealfall sogar rechnen können. Dies soll uns dabei helfen, besser zu spielen.

Im Verlauf der Arbeit steigt das Niveau deutlich an. Zu Beginn werden wir noch nahezu jeden Schritt erläutern. Später in der Arbeit werden solche Schritte ggf. nicht mehr erläutert, da wir damit auch auf den wachsenden Sachverstand des Lesers reagieren.
Die Vorstellung der beiden konkreten Regelsets in Kombination mit der dazugehörigen Theorie soll es dem Leser langfristig ermöglichen, sich auch in andere Kurzspiele schnell einzuarbeiten, die dann ggf. privat oder im Schulunterricht verwendet werden können.

Am Ende folgt ein Ausblick, in dem angeteasert wird, was die kombinatorische Spieltheorie noch Spannendes zu bieten hat. Dies soll dazu inspirieren, sich weiter mit dem Thema auseinanderzusetzen.

1.4 Verwendung von Literatur/Quellen

Die Theorie der Kurzspiele wurde selbstverständlich nicht von uns entwickelt. Die Inspiration für den Aufbau der Arbeit haben wir aus dem Werk „Combinatorial Game Theory“ von Aaron N. Siegel [2]. Die theoretischen Grundlagen und Definitionen sind allesamt sinngemäß aus diesem Werk entnommen, allerdings gemäß der Zielsetzung dieser Arbeit umformuliert und um zahlreiche Zwischenschritte und Erklärungen ergänzt worden. Auch viele Theoreme sind inklusive ihres Beweises dort zu finden. Die Beweise haben wir im Rahmen dieser Arbeit versucht, größtenteils selbst zu führen, weshalb sie sich teilweise von den Beweisen aus „Combinatorial Game Theory“ unterscheiden. Bei komplexeren Beweisen, wie dem des Satzes von Sprague-Grundy mit der kaz-Regel, haben wir uns allerdings an der Beweisführung des Buches orientiert und diese lediglich um passende Erläuterungen ergänzt. Auch eine Auswahl an Aufgaben wurde aus dem Buch übernommen (dort finden sich aber leider keine Lösungen). Darüber hinaus haben wir auch eigene Aufgaben zur Übung entwickelt und sämtliche Aufgaben selbst gelöst. Insgesamt hat dieses Werk uns eine hervorragende Orientierung geliefert,

um uns eigenständig in die kombinatorische Spieltheorie einzuarbeiten und eine Auswahl an Inhalten aus dem Buch zu treffen, die wir hier vorstellen und erklären möchten. Die Struktur unserer Arbeit unterscheidet sich an einigen Stellen von der des Buches, da wir die entsprechenden Inhalte für die Zielgruppe dieser Arbeit angepasst haben. Wir werden in dieser Arbeit nicht mit Zitaten und Literaturverweisen arbeiten, da wir ausschließlich mit „Combinatorial Game Theory“ gearbeitet haben und die entsprechenden Inhalte dort nachzulesen sind.
„Combinatorial Game Theory“ behandelt zusätzlich zu den in dieser Arbeit behandelten Inhalten auch zahlreiche weitere und kann daher zur Weiterbildung hinzugezogen werden. Dabei ist allerdings anzumerken, dass dieses Buch sehr formal ist und die Inhalte deutlich sparsamer erklärt werden, als es hier der Fall ist.

Zusätzlich empfehlen wir den Klassiker der kombinatorischen Spieltheorie, wenn man sich ein wenig unformaler der Thematik nähern möchte: „Winning Ways for Your Mathematical Plays“ [1] von Berlekamp, Conway und Guy.

1.5 Übersicht über verwendete Zeichen

Die folgende Tabelle soll eine kurze Übersicht zum Nachschlagen der häufig benutzten Zeichen in dieser Arbeit liefern. Die formale Definition dieser Zeichen erfolgt an entsprechender Stelle der Arbeit. Sollte eines dieser Zeichen dann im weiteren Verlauf noch einmal auftauchen und es besteht Unsicherheit oder Verwechslungsgefahr, so kann man die Tabelle nutzen, um sich an die Bedeutung des entsprechenden Zeichens zu erinnern. Die Reihenfolge der Zeichen in der Tabelle entspricht ihrem Auftreten in der Arbeit.

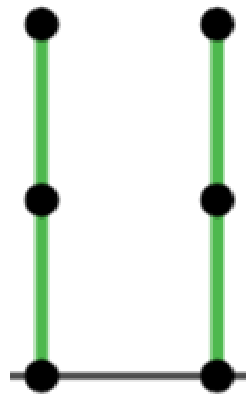
Zeichen	**Erklärung**
$\oplus$	entweder-oder-Verknüpfung
$*m$	NIM-Stapel der Länge m
$\hat{m}$	NIM-Wert des Spiels $*m$
G, H	konkrete Kurzspiele G und H
$\mathcal{G}$	die Gruppe der Kurzspiele
$\hat{M}$	die Menge aller Kurzspiele
G^B, G^R	die Menge der blauen bzw. roten Optionen
$G + H$	die disjunkte Summe der Kurzspiele G und H
$\equiv$	Äquivalenzrelation auf $\hat{M}$
$o(G)$	Ausgang des Spiels G
E, Z, B, R	die vier möglichen Ausgänge
$[G]$	Äquivalenzklasse von G
$<, =, >$	partielle Ordnung auf Ausgängen
$\geqq$	partielle Ordnung auf $\mathcal{G}$
$G \rhd H$	G ist echt größer als H
$G \not\lessgtr H$	G und H sind verschwurbelt
$G \blacktriangleright H$	G ist größer als H oder mit H verschwurbelt

Kapitel 2
Kombinatorische Spiele

Ziel dieses Kapitels ist es, konkrete Regelsets für kombinatorische Spiele vorzustellen. Anhand eines besonders einfachen Regelsets werden wir ebenfalls zeigen, wie eine Lösung eines konkreten Regelsets aussehen kann. Insgesamt gibt es eine Vielzahl an Regelsets für kombinatorische Spiele. Von diesen stellen wir nur eine sehr eingeschränkte Menge innerhalb dieser Arbeit vor. Die Wahl fiel dabei auf NIM und Hackenbush, da diese gut geeignet sind, um die in den weiteren Kapiteln vorgestellten Inhalte zu veranschaulichen. Diese Inhalte beziehen sich aber auch zusätzlich auf andere Regelsets, die wir nicht vorstellen.

2.1 NIM

Ein besonders einfaches Regelset für kombinatorische Spiele bietet NIM. Das Spielfeld eines NIM-Spiels beinhaltet eine endliche Anzahl von Stapeln von Gegenständen (bspw. Streichhölzer, Münzen oder in dem von uns im folgenden betrachteten Fall grünen Strichen). Dabei befindet sich zu Spielbeginn auf jedem Stapel eine bestimmte (endliche) Anzahl von Strichen. Die beiden Spielenden ziehen abwechselnd und müssen in ihrem Zug von einem beliebigen Stapel eine beliebige Menge an Strichen (mindestens einen) entfernen. In der Standardvariante gewinnt der Spielende, der den letzten gültigen Zug macht, also derjenige, der den letzten Stapel vollständig entfernt. In der Misere-Variante hingegen verliert, wer den letzten gültigen Zug macht.
Offensichtlich kann ein Unentschieden bei diesem Spiel aufgrund der endlichen Anzahl der Stapel und Striche nicht auftreten. Da in jedem Zug mindestens ein Strich entfernt wird, endet das Spiel nach maximal n Zügen, wobei n der Anzahl der Striche entspricht.
Wir betrachten die folgende Instanz eines NIM-Spiels, bei der zwei Stapel mit jeweils zwei Strichen vorliegen:



NIM-Spiel mit zwei Stapeln

Offensichtlich kann in der Standardvariante die beginnende Spielerin bei perfektem Spiel nicht gewinnen. Denn sollte die erste Spielerin von einem Stapel beide Striche entfernen, so reagiert der zweite Spieler, indem er den zweiten Stapel komplett entfernt. Sollte die erste Spielerin von einem Stapel nur einen Strich entfernen, so reagiert der zweite Spieler, indem er vom anderen Stapel ebenfalls nur einen Strich entfernt. Offensichtlich ist die Startspielerin nun gezwungen einen Stapel komplett zu entfernen, sodass der zweite Spieler in der Folge den anderen Stapel komplett entfernen kann und somit gewinnt.

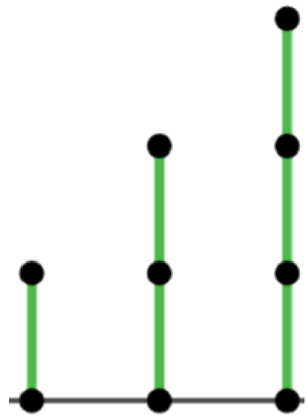
Interessanterweise kann die beginnende Spielerin auch in der Misere-Variante nicht gewinnen. Sollte die Startspielerin einen Stapel komplett entfernen, so reagiert der zweite Spieler, indem er vom noch vorhandenen Stapel nur einen Strich entfernt, sodass die Startspielerin den letzten Strich entfernen muss und somit verliert. Sollte sie beginnen, indem sie von einem Stapel nur einen Strich entfernt, so entfernt der zweite Spieler den anderen Stapel komplett und die Startspielerin ist wiederum gezwungen, den letzten Stapel komplett zu entfernen.

Offensichtlich befindet sich der zweite Spieler in diesem besonderen Spiel sowohl in der normalen als auch in der Misere-Variante in einer Position, die es ihm erlaubt, einen Sieg zu erzwingen. Es stellt sich nun die Frage, wie eine Instanz eines NIM-Spiels aussehen muss, damit ein bestimmter Spieler einen Sieg erzwingen kann.

Wir nähern der Analyse von Standard-NIM auf die einfachste erdenkliche Weise. Ein NIM-Spiel, das nur aus einem einzigen Stapel besteht, wird von der beginnenden Spielerin gewonnen, indem sie den Stapel komplett entfernt. Bei einem NIM-Spiel, das aus zwei Stapeln besteht, unterscheiden wir zunächst, ob die beiden Stapel eine unterschiedliche oder eine identische Anzahl an Strichen enthalten.
Bei identischer Anzahl von Strichen kann der zweite Spieler einen Sieg garantieren, indem er den Zug der ersten Spielerin im jeweils anderen Stapel kopiert. Damit ist sichergestellt, dass der zweite Spieler den letzten Zug macht, da er nach jedem Zug der ersten Spielerin mit Sicherheit noch eine gültige Zugmöglichkeit hat. Diese Taktik bezeichnen wir in der Folge als **Spiegelbildstrategie**.
Haben die beiden Stapel vor dem ersten Zug nicht die gleiche Größe, so kann die erste Spie-

lerin einen Sieg garantieren, indem sie vom größeren Stapel die Anzahl an Strichen entfernt, so dass die beiden Stapel dieselbe Größe haben. Nun ist der zweiter Spieler an der Reihe und sie kann nun selbst die Spiegelbildstrategie anwenden und somit gewinnen.

Doch wie sieht das Ganze jetzt bei NIM-Spielen mit mehr als zwei Stapeln aus?



Beispielhaftes NIM-Spiel

Wir machen uns klar, dass bei dieser Variante der zweite Spieler einen Sieg garantieren kann. Dafür gehen wir tatsächlich noch einmal alle möglichen ersten Züge durch:
Beginnt die Startspielerin damit, den ersten Stapel komplett zu entfernen, so reagiert der zweite Spieler, indem er vom dritten Stapel einen Strich entfernt. Dies führt zu der Spielsituation, die wir im vorherigen Beispiel schon analysiert hatten und die der zweite Spieler mit Sicherheit gewinnen kann.
Beginnt die Startspielerin damit, vom zweiten Stapel einen Strich zu entfernen, so entfernt der zweite Spieler den dritten Stapel komplett. Entfernt sie stattdessen zu Beginn den zweiten Stapel komplett, so entfernt der zweite Spieler als Reaktion zwei Striche vom dritten Stapel.
Beginnt die Startspielerin damit, dass sie vom dritten Stapel einen Strich entfernt, so reagiert der zweite Spieler, indem er den ersten Stapel komplett entfernt. Somit befinden wir uns wiederum im Startzustand des letzten Beispiels. Entfernt sie stattdessen zwei Striche, so entfernt der zweite Spieler als Reaktion den zweiten Stapel komplett und gewinnt als Folge. Entfernt sie zu Beginn den dritten Stapel komplett, so reagiert der zweite Spieler indem er vom zweiten Stapel einen Strich entfernt. Somit kann er für alle möglichen Startzüge der ersten Spielerin einen Sieg erzwingen.

Bei der Betrachtung dieses Beispiels wird klar, dass eine direkte Anwendung der Spiegelbildstrategie, so wie oben, nicht möglich ist. Man sieht jedoch, dass sich NIM-Spiele durch vollzogene Züge auf kleinere NIM-Spiele reduzieren lassen, von denen der Ausgang möglicherweise bereits bekannt ist. Die Taktik ist es also, das Spiel durch den eigenen Zug auf ein NIM-Spiel zu reduzieren, von dem man weiß, dass der andere Spieler für dieses Spiel keine Gewinnstrategie anwenden kann.
Theoretisch wäre es also möglich, für ein gegebenes NIM-Spiel rekursiv alle kleineren NIM-Spiele zu analysieren. Dies war in unserem Beispiel noch sehr leicht, allerdings wird dies

mit zunehmender Strich- und Stapelanzahl signifikant aufwändiger. Glücklicherweise gelang es Charles Bouton im Jahr 1902 eine Strategie zu entwickeln, die es dem jeweiligen Spieler erlaubt, mit relativ wenig Aufwand zu erkennen, ob er sich in einer Position befindet, die es ihm erlaubt, einen Sieg zu erzwingen oder nicht und außerdem aufzeigt, was ein perfekter Zug in der jeweiligen Situation ist. Dies funktioniert auf dieselbe Weise wie die Analyse der eigenen Position, da ein perfekter Zug dem Gegner eine Position übergeben sollte, aus welcher dieser keinen Sieg erzwingen kann. Ziehen wir aus einer günstigen Position, so können wir auf diese Weise ermitteln, ob ein möglicher Zug diese Bedingung erfüllt.

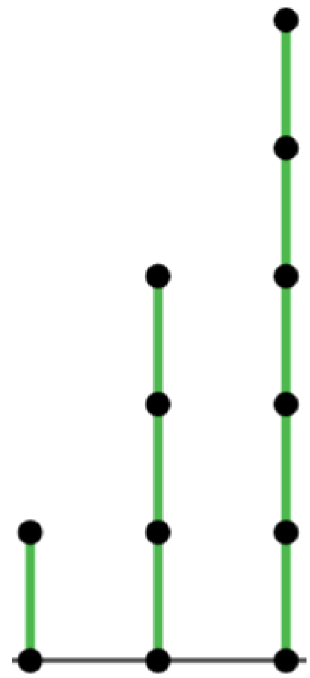
Zur Analyse eines bestimmten NIM-Spiels benötigen wir noch die folgende Definition, die eine formale Darstellung der logischen Entweder-Oder-Verknüpfung bildet.

Definition 2.1 Die Verknüpfungstafel der Entweder-Oder-Verknüpfung $\oplus$ auf der Menge $\{0,1\}$ist definiert als:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Wir wollen damit im Folgenden ausrechnen, ob uns ein bestimmtes NIM-Spiel erlaubt, einen Sieg zu erzwingen, wenn wir dort den nächsten Zug machen. Jedes NIM-Spiel ist eindeutig durch die Anzahlen von Strichen auf den jeweiligen Stapeln charakterisiert. Die beiden vorangegangenen Beispiele könnten wir demnach als $[2,2]$ bzw. $[1,2,3]$ notieren. Die Reihenfolge, in welcher die Anzahlen von Strichen genannt werden, ist dabei nach dem Regelset von NIM egal. Nun wollen wir den sogenannten „NIM-Wert“ berechnen, eine Größe, die uns Auskunft darüber gibt, ob wir den Sieg erzwingen können. Dazu schreiben wir zunächst die Anzahlen von Strichen in unseren Stapeln in Binärdarstellung. Die auf diese Weise entstandenen Binärzahlen werden einer beliebigen Reihenfolge nach bitweise mit $\oplus$ verknüpft. Ist das Endergebnis 0, so ist es uns als Spielerin, die am Zug ist, nicht möglich, garantiert einen Sieg zu erzwingen. Für jedes andere Ergebnis können wir dies durchaus tun. Dazu wollen wir so ziehen, dass wir unserem Gegner ein Spiel mit dem Wert 0 übergeben, da wir wissen, dass dieser dort dann keinen Sieg erzwingen kann.

Um dies genauer zu verstehen betrachten wir zunächst das Beispiel $[1,3,5]$:



$[1, 3, 5]$

Die Binärdarstellungen der einzelnen Stapelgrößen sehen wiefolgt aus:

$$1_{10} = 1_2 = 001_2,\ 3_{10} = 11_2 = 011_2 \text{ und } 5_{10} = 101_2$$

Damit ergibt sich sich für den NIM-Wert:

$$001_2 \oplus 011_2 \oplus 101_2 = 111_2$$

Offensichtlich ist das Ergebnis des NIM-Werts nicht 0. Somit können wir einen Sieg als erste Spielerin garantieren. Dafür müssen wir einen Zug durchführen, der den NIM-Wert auf 0 setzt. Wir machen uns klar, dass eine Ziffer 1 im NIM-Wert bedeutet, dass die dazugehörige Binärstelle in ungerader Anzahl im NIM-Spiel vorkommt. In unserem Beispiel mit NIM-Wert 111_2 bedeutet dies, dass sowohl die 1er-, als auch die 2er- und 4er-Stelle in ungerader Anzahl vorkommen. Dies ist offensichtlich korrekt, da die 4 nur einmal unserem Stapel mit 5 Strichen vorkommt. Die 2 befindet sich ausschließlich in dem Stapel mit 3 Strichen und die 1 kommt in jeder Binärdarstellung der Stapel genau einmal (also insgesamt 3 mal) vor.
Um auf einen NIM-Wert von 0 zu ziehen, müssen wir also gewährleisten, dass jede Binärstelle nur in gerader Anzahl vorkommt. In unserem Beispiel bedeutet dies, dass wir auf jeden Fall im Stapel mit 5 Strichen ziehen müssen, da es ansonsten unmöglich ist, die 4er-Stelle in gerader Anzahl zu erhalten. Wir müssen also die einzige 4 entfernen und weiterhin dafür sorgen, dass sowohl die 2er als auch die 1er Stelle in gerader Anzahl vorkommt. Der korrekte Zug ist es also vom Stapel mit 5 Strichen 3 zu entfernen, da wir aus der $5_{10} = 101_2$ somit eine $2_{10} = 10_2 = 010_2$ erzeugen. Wir haben also insgesamt die Anzahl der 4en und die Anzahl der 1en um 1 verringert und die Anzahl der 2en um 1 erhöht. Somit sind nun alle Anzahlen gerade und es gilt:

$$001_2 \oplus 011_2 \oplus 010_2 = 000_2$$

Diese Vorgehensweise kann man auch direkt in der $\oplus$ Verknüpfung anwenden, ohne über so etwas wie gerade und ungerade Anzahlen nachdenken zu müssen. Dazu betrachten wir die unterschiedlichen Stapel und suchen denjenigen heraus, der es uns erlaubt, durch Kippen einzelner Bits an jeder Stelle des NIM-Werts eine 0 zu erzeugen. In unserem Beispiel $[1, 3, 5]$ gibt es nur einen korrekten Zug. Es gibt allerdings auch Beispiele, in denen mehrere Züge korrekt sind.

Dafür betrachten wir das Beispiel $[1, 2, 3, 4, 5]$. Für die Binärdarstellungen gilt:

$$1_{10} = 1_2 = 001_2,\ 2_{10} = 11_2 = 010_2,\ 3_{10} = 11_2 = 011_2,\ 4_{10} = 100_2 \text{ und } 5_{10} = 101_2$$

Für den NIM-Wert gilt also:

$$001_2 \oplus 010_2 \oplus 011_2 \oplus 100_2 \oplus 101_2 = 001_2$$

Ein korrekter Zug muss also nur ein Bit auf der 1er-Stelle kippen und alles andere unangetastet lassen. Da wir nach Regelset nur Striche entfernen, aber keine neuen hinzufügen können, bedeutet dies, dass wir in diesem Fall nur in den Stapeln mit den Größen 1,3 bzw. 5 einen Strich entfernen können und somit einen korrekten Zug machen.

Um zu zeigen, dass die soeben veranschaulichte Taktik immer zu einem Sieg führt, müssen wir zwei Dinge beweisen:

Theorem 2.2 (Satz von Bouton)
1. *Jeder gültige Zug in einem NIM-Spiel mit NIM-Wert* 0 *führt zu einem Spiel mit NIM-Wert ungleich* 0.

2. *In jedem Spiel mit NIM-Wert ungleich* 0 *existiert ein gültiger Zug auf ein Spiel mit NIM-Wert* 0.

Beweis Seien $a_1, a_2, ...a_n$ die Binärdarstellungen der Stapel unseres NIM-Spiels. Sei a_{NIM} die Binärdarstellung des NIM-Werts.

Teil 1:
Sei $a_{NIM} = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n = 0$. Sei a_i die Binärdarstellung des Stapels, in dem wir Striche entfernen, dann gibt es in der Binärdarstellung a_i eine höchstwertige Stelle, dessen Wert gekippt (also von 0 auf 1 bzw. von 1 auf 0 geändert) wird. Da das Kippen dieses Eintrags an dieser Stelle nicht ausgeglichen werden kann, hat die Binärdarstellung des NIM-Werts a_{NIM} nun an dieser Stelle eine 1.

Teil 2:
Sei nun $a_{NIM} = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n \neq 0$. Sei j die höchstwertige Stelle der Binärdarstellung von a_{NIM}, an der sich eine 1 befindet. D.h. es existiert mindestens ein a_i mit einer 1 an der

$j - ten$ Stelle (von hinten gelesen) der Binärdarstellung. Für alle Stellen $k \leq j$ von a_i setzen wir nun $a_{ik_{neu}} = a_{ik} \oplus a_{NIM_k}$. Diese Konstruktion gewährleistet, dass an allen Stellen $k \leq j$ von $a_{NIM_{neu}}$ eine 0 steht. Weiterhin sind nach Voraussetzung bereits alle höherwertigen Stellen 0. Somit ist nun der NIM-Wert $a_{NIM} = 0$. Da explizit die höchstwertige relevante Stelle von einer 1 auf eine 0 gekippt wird und diese einen höheren Wert hat, als alle niederwertigeren Stellen zusammen, ist gewährleistet, dass die Anzahl der Striche von $a_{i_{neu}}$ kleiner ist als die von a_i. Somit haben wir einen gültigen Zug gefunden, der zu einem NIM-Wert von 0 führt. □

Korollar 2.3 *Da das leere NIM-Spiel den NIM-Wert* 0 *hat, befindet man sich in einer Gewinnposition, solange man dem Gegner mit dem eigenen Zug einen NIM-Wert von* 0 *übergibt.*

Nun wollen wir noch kurz aufzeigen, dass wir jetzt auch NIM-Spiele mit weit größeren Stapeln sehr schnell analysieren können. Die bisherigen Beispiele waren auch ohne das Wissen um die Taktik schnell zu verstehen und auch Spieler*innen, die die Strategie nicht kennen, würden nach kürzester Zeit die perfekten Züge kennen und verwenden. Wir betrachten nun das NIM-Spiel $[11, 17, 39]$. Für die Binärdarstellungen gilt:

$$11_{10} = 1011_2 = 001011_2, 17_{10} = 10001_2 = 010001_2, 39_{10} = 100111_2$$

Für den NIM-Wert gilt also:

$$001011_2 \oplus 010001_2 \oplus 100111_2 = 111101_2$$

Der NIM-Wert des Spiels ist $\neq 0$, somit kann die erste Spielerin einen Sieg erzwingen, indem sie auf einen NIM-Wert 0 zieht. Die höchstwertige Stelle der Binärdarstellung des NIM-Werts, die eine 1 beinhaltet, ist die vorderste (32er-Stelle der Binärdarstellung). Wir müssen nun also in einem Stapel ziehen, der an dieser Stelle eine 1 hat. Dafür kommt in diesem Fall nur die 39 in Frage. Wir wenden die Taktik an und müssen die Stapelgröße erzeugen die folgender Forderung genügt:

$$100111_2 \oplus 111101_2 = 011010_2 = 26_{10}$$

Das bedeutet, für einen perfekten Zug muss die erste Spielerin vom 39-er Stapel 13 Striche entfernen, um einen NIM-Wert von 0 zu erzeugen und somit perfekt zu ziehen. Dem zweiten Spieler bleibt nach Boutons Theorem keine andere Möglichkeit als auf einen NIM-Wert $\neq 0$ zu ziehen, sodass die erste Spielerin die Taktik wiederholen und somit einen Sieg garantieren kann.

Definition 2.4 Wir nennen $*m$ ein NIM-Spiel mit genau einem Stapel aus m Strichen. Den dazugehörigen NIM-Wert nennen wir $\hat{m}$.

Aufgabe 2 Wandeln Sie folgendes NIM-Spiel G in einen einzelnen Stapel mit identischem NIM-Wert um: $G = [2, 6, 1, 4, 8]$

Aufgabe 3 Sei $G = [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ ein NIM-Spiel. Zeigen Sie, dass die erste Spielerin einen Sieg in G garantieren kann. Geben Sie zudem alle Möglichkeiten an, wie ihr erster Zug in G aussehen kann, wenn sie gemäß der Gewinnstrategie für NIM zieht.

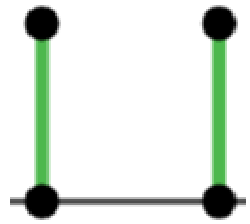
2.2 Misere-NIM

Wir haben nun eine Lösungsstrategie für das normale NIM-Spiel gefunden. Doch wie sieht es mit der Misere-Variante aus? Wir erinnern uns an das einführende Beispiel aus dem letzten Teilkapitel. Wir haben dabei zwei Stapel mit jeweils zwei Strichen betrachtet. Dies entspricht in unserer Schreibweise also dem Spiel $[2, 2]$. Wir haben zudem festgestellt, dass der zweite Spieler sowohl im Standard-NIM als auch in der Misere-Variante einen Sieg erzwingen kann. Letzteres kann auf zwei mögliche Arten geschehen:

Entweder die erste Spielerin entfernt einen Stapel komplett und übergibt $[0, 2]$ bzw. $[2, 0]$, sodass er reagiert, indem er im letzten vorhandenen Stapel auf $[0, 1]$ bzw. $[1, 0]$ zieht und die erste Spielerin dazu zwingt, den letzten gültigen Zug zu machen und somit das Spiel zu verlieren.

Oder die erste Spielerin entfernt von einem der beiden Stapel nur einen Strich und übergibt $[1, 2]$ bzw. $[2, 1]$. Dann reagiert der zweite Spieler, indem er den Stapel mit zwei Strichen komplett entfernt und übergibt $[1, 0]$ bzw. $[0, 1]$ und erzwingt somit einen Sieg.

Wozu aber diese ganze Wiederholung? Wenn wir uns die Gewinnstrategie für Standard-NIM anschauen, so wird sofort klar, dass wir uns zu Beginn in einer Position befinden, in der der NIM-Wert 0 ist, da $10_2 \oplus 10_2 = 00_2$. Der ersten Spielerin bleibt also nichts anderes übrig, als auf einen NIM-Wert $\neq 0$ zu ziehen. Der Zug des zweiten Spielers endet aber in jedem der Fälle entweder in $[1, 0]$ oder $[0, 1]$, was einem NIM-Wert von 01_2 entspricht. D.h. die Gewinnstratgie (falls vorhanden) von Misere-NIM weicht offensichtlich von der Standardgewinnstrategie ab. Allerdings kann sie auch nicht gänzlich unterschiedlich sein. Denn eine Spielsituation wie die hier gegebene $[2, 2]$ lässt sich ja unter Verwendung der Standardgewinnstrategie je nach Ursprungssituation erzeugen. Es scheint also einen Punkt zu geben, bis zu dem die Standardstrategie greift. Ab diesem Punkt allerdings muss sie dann aber geändert werden. Doch wo liegt dieser Punkt?



Misere NIM $[1,1]$

Betrachten wir das Misere-NIM-Spiel $[1,1]$. Hier kann der zweite Spieler offensichtlich nicht gewinnen, da die erste Spielerin immer auf $[1,0]$ bzw. $[0,1]$ ziehen wird und der zweite Spieler somit gezwungen ist den letzten Strich zu entfernen. Selbiges gilt offensichtlich auch für das Spiel $[1,1,1,1]$ sowie alle anderen Spiele mit gerader Stapelanzahl, in denen zudem jeder Stapel die Größe 1 hat. Diese Spiele haben allerdings allesamt einen NIM-Wert von 0. Wir stellen also fest, dass Spiele, die ausschließlich Stapel mit Größe 1 (zusätzlich existieren natürlich noch die bereits komplett geleerten Stapel der Größe 0) in gerader Anzahl beinhalten, zwar einen NIM-Wert von 0 besitzen, aber **nicht** den zweiten Spieler begünstigen. Der zweite Spieler wird von Spielen begünstigt, in denen ausschließlich Stapel der Größe 1 vorkommen, diesmal aber in ungerader Anzahl.
Wir machen uns klar, dass der zweite Spieler unter Einbeziehung dieser Erkenntnisse trotzdem eine Gewinnstrategie für Misere-NIM besitzt, sofern die Ausgangsposition des Spiels mit NIM-Wert 0 startet und mindestens einen Stapel mit zwei oder mehr Strichen beinhaltet. (Um Verwirrung zu vermeiden: sobald mindestens ein Stapel mit zwei oder mehr Strichen existiert, muss natürlich noch ein weiterer Stapel mit zwei oder mehr Strichen existieren, um einen NIM-Wert von 0 zu garantieren.)

Die Strategie sieht wie folgt aus: Unter den gegebenen Voraussetzungen verwendet der zweite Spieler grundsätzlich die Gewinnstrategie für Standard-NIM, es sei denn, er würde mit seinem Zug dafür sorgen, dass sämtliche noch vorhandenen Stapel die Größe 1 (bzw. 0) besitzen. In diesem Fall zieht er so, dass Stapel mit Größe 1 in ungerader Anzahl übrig bleiben und garantiert somit seinen Sieg.

Bevor wir beweisen, dass diese Strategie wirklich immer anwendbar ist und funktioniert, wollen wir sie uns an einem Beispiel klar machen. Dazu verwenden wir das Beispiel $[1,2,3,4,4]$. Der NIM-Wert dieses Spiels ist 0. Die nötigen Voraussetzungen dafür, dass der zweite Spieler die Gewinnstrategie für Misere-NIM verwenden kann, sind also gegeben. Der ersten Spielerin bleibt nach Standard-NIM gar keine andere Wahl, als auf einen NIM-Wert $\neq 0$ zu ziehen. Für unser Beispiel zieht sie auf $[1,2,3,4,1]$. Der zweite Spieler muss nun auf $[1,2,3,1,1]$ ziehen, um einen NIM-Wert von 0 zu erzeugen. Die erste Spielerin könnte nun beispielsweise auf $[1,2,1,1,1]$ ziehen, indem sie vom 3er Stapel zwei Striche entfernt. In Standard-NIM würde der zweite Spieler nun auf $[1,0,1,1,1]$ ziehen, um einen NIM-Wert von 0 zu erzeugen, allerdings würde dies ausschließlich Stapel der Größe 1 bzw. 0 hinterlassen und er würde in diesem Fall das Spiel verlieren. Um zu gewinnen wendet er nun die modifizierte Gewinnstrategie für Misere-NIM an und zieht auf $[1,1,1,1,1]$. Somit sind nur noch Stapel der Größe

1 bzw. 0 vorhanden und er übergibt eine ungerade Anzahl an 1er Stapeln, was seinen Sieg garantiert.
Augenscheinlich funktioniert die Strategie. Dies wollen wir nun noch beweisen:

Theorem 2.5 (Gewinnstrategie für Misere-NIM)
Sei G ein Spiel in Misere-NIM. Dann gilt:
Falls G einen NIM-Wert von 0 hat und in G mindestens ein Stapel mit Größe ≥ 2 existiert, dann kann der zweite Spieler einen Sieg garantieren, indem er die Strategie für Standard-NIM solange verwendet, bis er mit seinem nächsten Zug dafür sorgen würde, dass jeder Stapel die Größe 1 oder 0 hat. Stattdessen zieht er dann so, dass er eine ungerade Anzahl von Stapeln der Größe 1 hinterlässt.

Beweis Wir wissen, dass die erste Spielerin auf einen NIM-Wert $\neq 0$ ziehen muss. Da G einen NIM-Wert von 0 hat und mindestens ein Stapel von Größe ≥ 2 existiert, muss nach Konstruktion des NIM-Werts noch mindestens ein zweiter Stapel mit dieser Eigenschaft existieren. Durch abwechselndes Ziehen mit der Standard-NIM-Strategie ist gewährleistet, dass die erste Spielerin irgendwann auf den Fall zieht (dieser hat nämlich einen NIM-Wert $\neq 0$), dass nur noch **genau ein** Stapel a_i mit Größe ≥ 2 existiert und alle anderen Stapel die Größe 1 oder 0 haben. Wir unterscheiden die beiden Fälle.

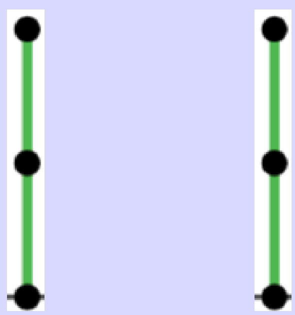
Fall 1:
Die Anzahl der Stapel mit Größe 1 ist gerade. Dann setzt der zweite Spieler $a_i = 1$. Dann existieren nur noch Stapel der Größe 0 und eine ungerade Anzahl an Stapeln der Größe 1, und die erste Spielerin ist als nächstes an der Reihe. Durch abwechselndes Ziehen garantiert der zweite Spieler seinen Sieg.
Fall 2:
Die Anzahl der Stapel mit Größe 1 ist ungerade. Dann setzt der zweite Spieler $a_i = 0$. Somit gilt selbiges wie in **Fall 1** und der zweite Spieler garantiert ebenfalls seinen Sieg. □

Da der Satz von Bouton für jede mögliche Ausgangsposition eine konkrete Strategie liefert, mit der genau eine spielende Person einen Sieg erzwingen kann, ist NIM in der Standard- und Misere-Variante vollständig gelöst.

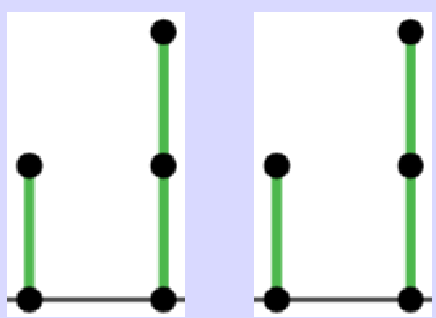
Aufgabe 4 Gegeben seien die beiden NIM-Spiele G und H. Wobei $G = H$ bis auf die Tatsache, dass G nach den Regeln von Standard-NIM und H nach den Regeln der Misere-Variante gespielt wird. Beide Spiele sollen nebeneinander gespielt werden. Dabei wird beim eigenen Zug jeweils entschieden, ob man in G oder in H zieht. Für den Sieg ist der letzte Zug insgesamt entscheidend. Wird der letzte Zug in G getätigt, gewinnt, wer auch immer diesen Zug gemacht hat. Liegt der letzte Zug in H, so verliert wer diesen Zug gemacht hat. Zeigen Sie, dass die erste Spielerin in den folgenden Spielen G und H einen Sieg erzwingen kann.

a) $G = H = [1]$

b) $G = H = [2]$



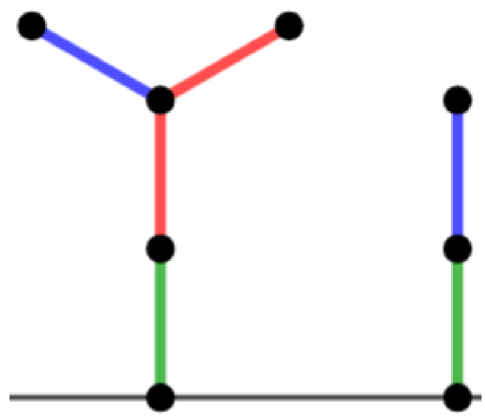
c) $G = H = [1, 2]$



d) Zeigen Sie nun, dass die erste Spielerin immer einen Sieg erzwingen kann, wenn G und H identisch sind.

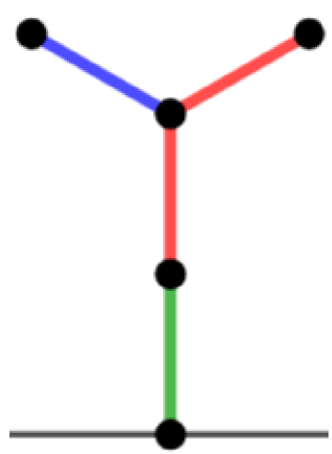
2.3 Hackenbush

Ein weiteres Regelset für kombinatorische Spiele ist Hackenbush. Während in NIM beide spielenden Personen dieselben Optionen zur Verfügung haben, und es einzig und allein darauf ankommt, wer beginnt, unterscheidet Hackenbush zwischen beiden. Um dies zu erfassen, nennen wir eine Spielerin Blau und den anderen Spieler Rot.
Ein Hackenbush-Spiel besteht aus grünen, blauen und roten Strichen, die durch die Knoten an ihren Enden miteinander verbunden sind. Zusätzlich gibt es eine (bei uns schwarze) Grundlinie, mit der manche Striche verbunden sind:



Hackenbush-Spiel

Macht eine Spielerin einen Zug, so entfernt sie einen Strich. Dabei gilt zu beachten, dass Blau nur blaue und grüne Striche entfernen darf, Rot nur rote und grüne. Jede Komponente eines Hackenbush-Spiels, die nach einem solchen Zug nicht mehr mit der Grundlinie verbunden ist, „fällt“, wird also ebenfalls durch diesen Zug entfernt. Wir wollen uns im Folgenden einmal anschauen, wie solch ein Zug aussehen kann. Nehmen wir an, dass Rot beginnt. Nun kann er beispielsweise den grünen Strich rechts unten entfernen. Dadurch fällt dann auch der blaue Strich darüber, denn er ist nicht mehr mit der Grundlinie verbunden:

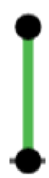


Hackenbush-Spiel nach dem Zug von Rot

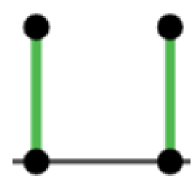
Alternativ hätte Rot auch den anderen grünen Strich oder einen der roten Striche entfernen dürfen. Es gewinnt in der Standard-Variante, wer den letzten gültigen Zug macht (auch hier gibt es eine Misere-Variante, in der man gewinnt, wenn der Gegner den letzten Zug macht).
Der beispielhafte Zug von Rot war alles andere als klug, denn Blau kann nun als zweite Spielerin den anderen grünen Strich entfernen und gewinnen. Doch hätte Rot dies verhindern können? Den anderen grünen Strich darf er aus demselben Grund ebenso nicht entfernen. Entfernt er den unteren roten Strich, so kann Blau den verbliebenen blauen Strich entfernen und nach zwei weiteren Spielzügen gewinnen. Entfernt er stattdessen den oberen roten Strich, so entfernt Blau den linken blauen Strich und wir befinden uns in der zuvor betrachteten Situation. Blau kann in diesem Spiel also als zweite Spielerin einen Sieg erzwingen. In diesem konkreten Beispiel könnte auch Rot einen Sieg erzwingen, sollte er als zweites spielen. Dazu muss er lediglich zuerst den obersten roten und anschließend den anderen roten Strich entfernen, so lange, bis Blau einen grünen Strich entfernen muss. Dann nimmt er den anderen und gewinnt. Das betrachtete Spiel kann also immer von der zweiten Person gewonnen werden, unabhängig von deren Farbe.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie, wer das beispielhafte Hackenbush-Spiel in der Misere-Variante gewinnt.

Wie auch bei NIM gibt es in Hackenbush Spiele, in denen immer die erste Spielerin einen Sieg erzwingen kann (**Grün**), und Spiele, in denen dies immer der zweite Spieler tun kann (**Grün,Grün**):

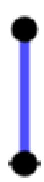


Grün



Grün,Grün

Doch betrachten wir weitere einfache Beispiele, so wird schnell klar, dass dies nicht die einzigen beiden Möglichkeiten sind:

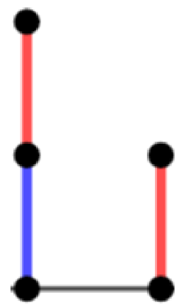


Blau

Rot

Das Spiel **Blau** wird offensichtlich immer von Blau gewonnen, völlig unabhängig davon, wer beginnt, da nur Blau eine gültige Zugmöglichkeit hat. Im Spiel **Rot** hingegen wird analog immer Rot gewinnen.

An dieser Stelle wollen wir kurz eine Notation für Hackenbush-Spiele einführen, die es uns ermöglicht ohne große Formalitäten bestimmte Spiele einfach zu benennen. Wir verwenden in der Folge zumeist sehr einfache Beispiele aus einem oder mehreren Stapeln. Dabei trennen wir die Stapel mit einem Komma und notieren die Farben der Stapel in der Reihenfolge von unten nach oben. Diese Notation ist natürlich nicht für alle Hackenbush-Spiele möglich, da beispielsweise Verzweigungen von dieser Notation nicht abgedeckt werden. Allerdings ist sie für die Erklärungen unserer Beispiele völlig ausreichend und zweckdienlich. Eine formale Notation erfolgt in Kapitel 3. Wir bezeichnen beispielsweise das folgende Spiel als G = **BlauRot,Rot**.



G = **BlauRot,Rot**

Aufgabe 6 Finden Sie ein Hackenbush-Spiel mit jeweils mindestens einem blauen, roten und grünen Strich, in welchem immer die Person gewinnt, die als erstes spielt.

Allgemein ist es bei Kurzspielen möglich, zwischen den Spielenden zu unterscheiden und verschiedene Zugoptionen zu erlauben. Spiele wie NIM, die dies nicht tun, können wir dann als Spezialfall auffassen. So können wir beispielsweise jede beliebige Position eines NIM-Spiels ganz einfach als Hackenbush-Position interpretieren. Die einzelnen Stapel fassen wir dazu als mit der Grundlinie verbundene Reihe von Strichen auf. Von dieser kann dann jeder Spielende offensichtlich eine beliebige Anzahl an Strichen entfernen. Wir wollen im folgenden einen Begriff für solche Spezialfälle wie NIM einführen:

Definition 2.6 Wir bezeichnen ein Spiel G als **unparteiisch**, wenn beide Spielenden in G sowie in jeder sich im Spielverlauf ergebenden Subposition von G dieselben Zugoptionen haben.

Wichtig an dieser Definition ist, dass sie sich nicht auf das gesamte Regelset bezieht, sondern auf konkret vorliegende Spiele. Die Hackenbush-Spiele **Grün** und **Grün,Grün** von oben sind beispielsweise unparteiisch, auch wenn im Regelset von Hackenbush Spiele konstruiert werden können, die dies nicht sind.
In unparteiischen Spielen ist es nicht möglich, dass Blau (bzw. Rot) immer einen Sieg erzwingen kann, unabhängig davon, wer startet. Würde beispielsweise Blau als erste Spielerin

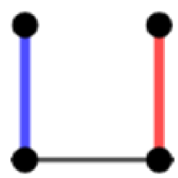
garantiert gewinnen, so könnte Rot als erster Spieler ebenfalls einen Sieg garantieren, indem er die Gewinnstrategie von Blau einfach übernimmt. Dies ist auf jeden Fall möglich, da Rot in jeder sich ergebenden Position dieselben Zugoptionen hat, die Blau sonst hätte.

2.4 Blau-Rotes Hackenbush

Eine Variante des Regelsets von Hackenbush erhalten wir, wenn wir keine grünen Striche erlauben. Es gibt also keinen Zug, den beide Spielenden machen könnten. Diese Variante bezeichnen wir als Blau-Rotes Hackenbush.

Aufgabe 7 Finden Sie ein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel mit deutlich mehr roten als blauen Strichen, in dem Blau immer einen Sieg erzwingen kann.

Spannend wird Blau-Rotes Hackenbush, wenn wir betrachten, welche Möglichkeiten es dort für die Spielenden gibt, ihren Sieg zu erzwingen. Die Spiele **Blau** und **Rot** aus dem vorherigen Kapitel sind gemäß des neuen Regelsets immer noch legal. Es gibt also Spiele, in denen immer Blau gewinnt, und solche, in denen stets Rot gewinnt. Doch gibt es noch weitere Fälle?



Blau,Rot

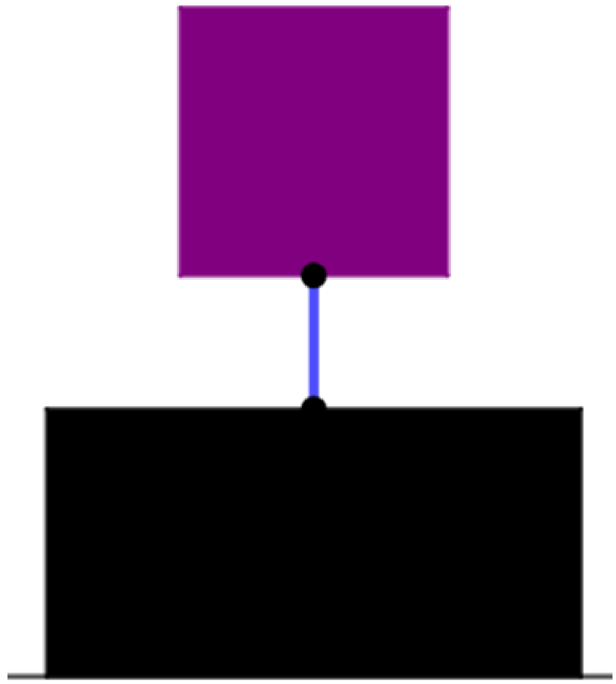
Betrachten wir das Spiel **Blau,Rot**, so sehen wir direkt, dass dort immer der zweite Spieler gewinnt, da sowohl Blau als auch Rot nur einen gültigen Zug machen können. Es gibt also auch hier Spiele, in denen immer der zweite Spieler seinen Sieg erzwingen kann, unabhängig von der Farbe. Doch interessanterweise gibt es keine Möglichkeit, ein Spiel zu konstruieren, in welchem immer die erste Spielerin ihren Sieg erzwingen kann:

Lemma 2.7 *In Blau-Rotem Hackenbush gibt es kein Spiel G, in dem sowohl Blau als auch Rot einen Sieg erzwingen könnten, sollten sie anfangen.*

Beweis Um die Aussage zu zeigen, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass Blau als erste Spielerin ihren Sieg in G erzwingen kann. Dann genügt es zu zeigen, dass Blau dies dann auch tun kann, sollte stattdessen Rot beginnen. Dies wollen wir zeigen, indem wir die Taktik, mit der Blau sicher gewinnen kann, angeben, und zwar in Abhängigkeit der Taktik T, mit der sie als erste Spielerin gewinnt. Teil dieser Taktik ist deren erster Zug, in welchem Blau einen blauen Strich S aus G entfernt und dadurch auf ein Spiel $\bar{G}$ zieht, in welchem sie sich als zweite Spielerin ihren Sieg sichern kann.

Jetzt gehen wir von der Situation aus, dass Rot beginnt. Blau erhält nun ihre Gewinnstrategie $\bar{T}$, indem sie so tut, als hätte sie den Strich S bereits entfernt, bevor Rot begonnen hat. Nun kann Rot hypothetisch einen Zug machen, den er auch hätte machen können, wenn S bereits entfernt worden wäre. Dann muss Blau in ihrer Strategie T aus dem Spielverlauf, in dem sie begonnen hat, eine passende Antwort auf diesen Zug haben. Diese liefert dann auch den entsprechende Zug für Blau in diesem Spielverlauf.
Sobald Rot jedoch das erste Mal einen Zug macht, für den die alte Gewinnstrategie T keine Antwort liefert, entfernt Blau einfach den Strich S. Dies ist in dieser Situation auf jeden Fall möglich, denn wäre S im bisherigen Spielverlauf „gefallen", dann hätte Rot keinen Zug machen können, für den die Gewinnstrategie T keine Antwort liefert. Denn ab dem Punkt, an dem S fällt, während vorher ausschließlich Züge gemacht wurden, auf die T eine Antwort liefert, befindet man sich in derselben Situation, als wäre S zu Beginn von Blau entfernt worden. Demnach ist T auch hier eine Gewinnstrategie, mit der Blau ihren Sieg erzwingen kann, und die Situation, dass Rot einen Zug macht, auf den T keine Antwort liefert, kann nicht mehr eintreten.
Gehen wir nun aber davon aus, dass Rot einen solchen Zug Z machen kann, auf den T keine Antwort liefert, und dabei einen Strich $\bar{S}$ entfernt. Z wäre allerdings kein gültiger Zug, wenn S vorher entfernt worden wäre, da sonst T eine Antwort für Blau liefern würde. Das bedeutet, dass $\bar{S}$ in einem Abschnitt von G liegen muss, welcher ohne S nicht mehr mit der Grundlinie verbunden wäre und fallen würde. Entfernt Blau also anschließend S, so ist man in der Situation, in der man vor dem Zug Z war, wenn S zu Beginn von Blau entfernt worden wäre. Diese Situation entspricht nun aber genau einer Situation, die wir erhalten, wenn Blau beginnt, S entfernt und dann gemäß T weiter spielt. Da T aber eine Gewinnstrategie für Blau ist, wenn Blau beginnt, gewinnt Blau auch hier.
Wenn wir T also im obig Beschriebenen anpassen, erhalten wir eine Gewinnstrategie $\bar{T}$ für Blau, wenn Rot anfängt. Wenn Blau als erste Spielerin einen Sieg erzwingen kann, kann sie dies also definitiv auch als zweite Spielerin. Somit gibt es kein Spiel in Blau-Rotem Hackenbush, in welchem immer die erste Spielerin ihren Sieg garantieren kann. □

Dieses Anpassen der Gewinnstrategie von Blau als erste Spielerin auf den Fall, dass sie als zweites zieht, wollen wir zusätzlich noch einmal beispielhaft veranschaulichen. Wir wollen dabei zwar möglichst allgemein bleiben, allerdings muss die Allgemeinheit aufgrund der bildlichen Darstellung in diesem Beispiel trotzdem leicht eingeschränkt werden:

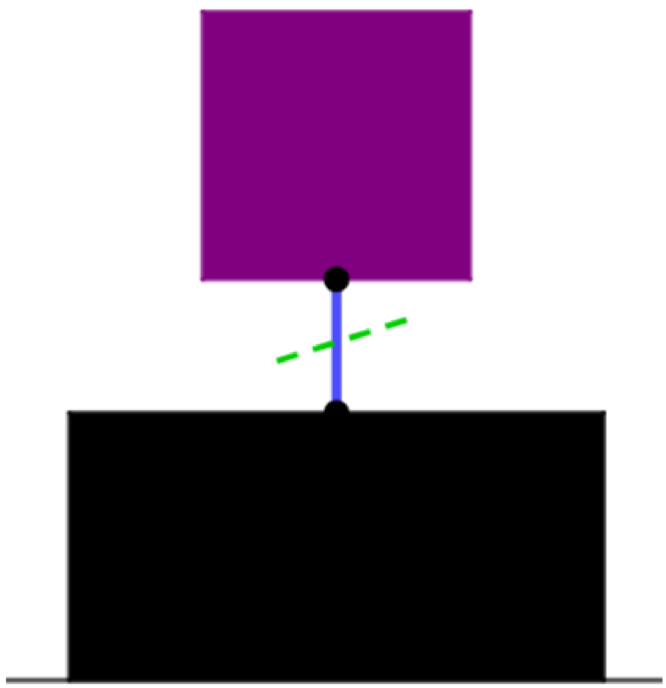


Blau-Rotes Hackenbush-Spiel G

In diesem Spiel G soll Blau nun als erste Spielerin eine Gewinnstrategie T haben. Der sichtbare blaue Strich in der Mitte ist der Strich S, welcher gemäß T im ersten Zug von Blau entfernt wird. Der schwarze Kasten verdeckt den Rest des Spiels, welches nach dem Entfernen von S verbleibt, der lila Kasten den Teil des Spiels, der durch S mit der Grundlinie verbunden war.
An dieser Stelle ist Vorsicht geboten, denn wir betrachten nur einen speziellen Fall. Es ist natürlich im Allgemeinen auch möglich, das der Teil hinter dem lila Kasten zusätzlich noch andere Verbindungen zur Grundlinie hat. Für die im Beweis konstruierte Taktik $\bar{T}$ ist das aber nicht wichtig, da zum Zeitpunkt, an dem S gemäß dieser neuen Gewinnstrategie entfernt wird, diese anderen Verbindungen bereits entfernt wurden. Wir betrachten zur Visualisierung des Beweises also nur den speziellen Fall aus der obigen Grafik, behalten aber im Hinterkopf, dass die beschriebene Taktik in anderen Fällen analog funktioniert.
Würde Blau beginnen, so wird sie S entfernen. Dadurch verliert der lila Kasten die Verbindung zur Grundlinie und fällt. In dem Rest hinter dem schwarzen Kasten muss sie dann als zweite Spielerin ihren Sieg erzwingen können:

G nach einem Zug, sollte Blau starten

In diesem Spiel liefert T also für jeden möglichen Zug eine passende Antwort für Blau. Nun gehen wir aber davon aus, dass Rot beginnt. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, Rot kann in dem lila Kasten oder in dem schwarzen Kasten ziehen. (Zur Erinnerung: In diesem Spezialfall ist der lila Kasten der Teil, der ausschließlich von S gestützt wird. Allgemein beinhaltet S alle Optionen, die von der Taktik T nicht berücksichtig werden.)
Sollte Rot nun im lila Kasten ziehen, so macht er einen Zug, für den T keine passende blaue Reaktion liefert. An dieser Stelle würde Blau dann gemäß der im Beweis konstruierten Taktik $\bar{T}$ den Strich S entfernen. Dann übergibt sie Rot den schwarzen Kasten, in welchem sie laut den vorherigen Überlegungen als zweite Spielerin ihren Sieg erzwingen kann.
Zieht Rot stattdessen im schwarzen Kasten, so stellt Blau sich einfach vor, sie hätte vor dem Zug von Rot bereits den Strich S entfernt:



G im Kopf von Blau, bevor Rot beginnt

Dann kann Blau den Zug von Rot innerhalb des schwarzen Kastens gemäß T kontern. Für jeden weiteren Zug von Rot im schwarzen Kasten fährt sie auf diese Weise fort. Um nicht zu verlieren, muss Rot also ab einem gewissen Punkt in dem lila Kasten ziehen. Dies muss er tun, bevor der Strich S durch das Spiel im schwarzen Kasten zu Fall gekommen ist. Wenn Rot aber statt im schwarzen Kasten in dem lila Kasten zieht, hinterlässt er im schwarzen Kasten ein Spiel, in welchem zuletzt Blau gemäß T gezogen hat. In diesem Spiel kann Blau dann dann dementsprechend ihren Sieg als zweite Spielerin erzwingen. Allerdings gibt es ja zusätzlich noch S und die verbleibenen Striche im lila Kasten. Für den Zug von Rot liefert T keine Antwort, da T eine Gewinnstrategie für die Situation ist, in der der lila Kasten zu Beginn fällt und Rot somit nie die Möglichkeit hat, dort zu ziehen. Gemäß der im Beweis konstruierten Gewinnstrategie $\bar{T}$ kann Blau aber nun einfach S entfernen. Dadurch übergibt sie Rot das verbliebene Spiel im schwarzen Kasten, in welchem sie als zweite Spielerin ihren Sieg erzwingen kann. Auf diese Weise kann sich Blau ihren Sieg sichern, auch wenn Rot beginnen sollte.

Es wäre natürlich auch denkbar, statt der grünen Striche die blauen und die roten Striche zu verbieten. Auf diese Weise erhalten wir eine weitere Variante, genannt Grünes Hackenbush. Da grüne Striche von beiden Spielenden entfernt werden können, ist Grünes Hackenbush unparteiisch.

Kapitel 3
Die Gruppe $\mathcal{G}$

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der formalen Struktur von Kurzspielen. Das Ziel ist es, alle denkbaren Kurzspiele mit einer Gruppenstruktur zu erfassen. Dies erlaubt es uns, weitere Eigenschaften von Kurzspielen sehr allgemein, d.h. losgelöst von einem konkreten Spiel, zu untersuchen.
Zur Erinnerung: Eine Gruppe $\mathcal{G}$ ist ein Tripel $(M,\circ,e)$, bestehend aus einer Trägermenge M, einer Verknüpfung $\circ$ und einem neutralen Element e. Die Verknüpfung $\circ$ ist dabei über M abgeschlossen und assoziativ. Das neutrale Element e ist rechts- und linksneutral. Des Weiteren existiert zu jedem $m \in \mathrm{M}$ ein inverses Element m^{-1}, sodass $m \circ m^{-1} = m^{-1} \circ m = e$. In unserem Fall soll diese Menge M eine Menge von Äquivalenzklassen von Kurzspielen bezüglich einer noch zu definierenden Äquivalenzrelation sein. Als Verknüpfung dient dabei die disjunkte Summe, welche später definiert wird. Als neutrales Element dient die Äquivalenzklasse, welches das leere Spiel enthält.

3.1 Was ist ein Kurzspiel?

Bevor wir eine passende Äquivalenzrelation definieren können, müssen wir zunächst einmal formal festlegen, was ein Kurzspiel ist. Dies wollen wir rekursiv tun. In dieser Rekursion stellen wir ein Kurzspiel G als geordnetes Paar von zwei Mengen, G^B und G^R, bestehend aus einfacheren Kurzspielen dar. Hierbei setzt sich die Menge G^B aus allen Kurzspielen zusammen, die durch einen Zug von Blau im Kurzspiel G entstehen. Für die Menge G^R gilt dies analog mit einem Zug von Rot. Wir schreiben:

$$G = \{G^B \mid G^R\}$$

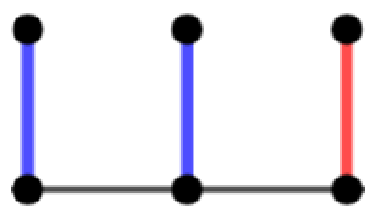
Wir nennen dabei G^B und G^R die **Menge der Optionen** für Blau bzw. Rot. Statt G^B bzw. G^R zu verwenden, können wir in dieser Notation auch alle Elemente von G^B bzw. G^R aufzählen. Dabei bezeichnen wir konkrete Elemente (also die einzelnen Optionen) von G^B als G^{B_1}, G^{B_2} usw.. Das Ende der Rekursion ist gegeben durch das leere Spiel 0, also ein Spiel, in dem weder Blau noch Rot ziehen können. Wir schreiben:

$$0 = \{\mid\}$$

Dies führt zu der folgenden formalen Definition:

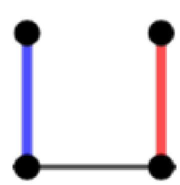
Definition 3.1 Sei $M_0 = \{0\}$. Für $n \geq 0$ setze $M_{n+1} = \Big\{\{G^B \mid G^R\} : G^B, G^R \subset M_n\Big\}$.
Dann ist ein Kurzspiel G ein Element von $\hat{M} = \bigcup\limits_{n\geq 0} M_n$.

Dies bedeutet insbesondere, dass ein Kurzspiel aus M_n nach höchstens n Zügen endet. Ein Kurzspiel ist also ein endliches, kreisfreies Spiel.
Diese rekursive Definition eines Kurzspiels ist bereits für kleine Spiele sehr komplex. Dafür wollen wir zunächst ein einfaches Hackenbush-Spiel betrachten:

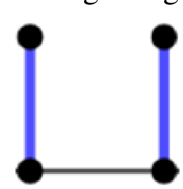


Blau,Blau,Rot

Um dieses Spiel rekursiv über die blauen und roten Optionen beginnend vom Nullspiel formal aufschreiben zu können, müssen wir zunächst alle blauen und roten Optionen kennen und diese formal aufschreiben können. Dies wiederum ist nur möglich, wenn wir all deren Optionen kennen etc., solange, bis nur das leere Spiel verbleibt. Dieses können wir bereits notieren.
Wir ziehen also zunächst schrittweise auf jede erdenkliche Art in **Blau,Blau,Rot** bis zum Nullspiel und halten dabei alle sich ergebenden Positionen fest. Kennen wir diese, können wir **Blau,Blau,Rot** beginnend beim leeren Spiel schrittweise rekursiv konstruieren. Dabei müssen wir für jedes Spiel, das auftaucht, immer sowohl die blauen als auch die roten Optionen vermerken, unabhängig davon, wer zuvor gezogen hat und demnach in einem konkreten Spielverlauf nicht am Zug wäre.
Sowohl Blau als auch Rot können jeweils nur auf ein mögliches Spiel ziehen. Blau würde **Blau,Rot** und Rot würde **Blau,Blau** nach dem eigenen Zug übergeben:



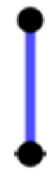
Fall 1: **Blau,Rot**



Fall 2: **Blau,Blau**

Betrachten wir zunächst den Fall 1, in dem wir nun das Spiel **Blau,Rot** auf die gleiche Art und Weise analysieren müssen, d.h., wir untersuchen die Optionen für jeweils Blau und Rot, auch wenn in einem konkreten Spielverlauf nun Rot an der Reihe wäre, da Blau zuletzt gezogen hat. Auch hier haben Blau und Rot jeweils nur einen möglichen Zug: Blau würde auf das Spiel **Rot** und Rot auf das Spiel **Blau** ziehen:

Fall 1.1: **Rot**



Fall 1.2: **Blau**

Bei diesen beiden Spielen ist offensichtlich, dass jeweils nur Rot (Fall 1.1) bzw. Blau (Fall 1.2) eine gültige Zugmöglichkeit besitzt. Diese führt direkt zum leeren Spiel, dessen Definition wir bereits kennen. Die jeweils andere Spieler*in hat keine gültige Option. Somit können wir diese beiden Spiele formal notieren (Dabei nutzen wir den größeren vertikalen Strich in der Folge mitunter, um die blauen und roten Optionen des jeweils aktuell betrachteten Gesamtspiels zu trennen. Dies dient der Übersichtlichkeit bezüglich der Rekursion):

$$\textbf{Rot} = \{\big|\{|\}\} \qquad \textbf{Blau} = \{\{|\}\big|\}$$

In Fall 2 hat Blau nur die Option auf das Spiel **Blau** zu ziehen, während Rot keine gültige Option hat. Somit können wir nun die Spiele **Blau,Rot** und **Blau,Blau** formal notieren, indem wir die möglichen Optionen für Blau und Rot einsetzen:

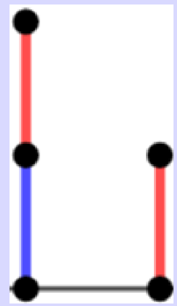
$$\textbf{Blau,Rot} = \{\{|\{|\}\}\big|\{\{|\}|\}\} \qquad \textbf{Blau,Blau} = \{\{\{|\}|\}\big|\}$$

Das Ziel dieses ganzen Vorgehens war es, das (wirkliche einfache) Spiel **Blau,Blau,Rot** über die rekursive Definition eines Kurzspiels formalisieren zu können:

$$\textbf{Blau,Blau,Rot} = \{\{\{|\{|\}\}|\{\{|\}|\}\}\big|\{\{\{|\}|\}|\}\}$$

Es gilt dabei zu beachten, dass wir mit Absicht ein Beispiel betrachtet haben, in dem Blau und Rot in jedem Schritt nur einen möglichen Zug haben. Für Spiele, in denen dies nicht der Fall ist, ist es deutlich aufwändiger, diese Rekursion durchzuführen. Weiterhin stellen wir fest, dass der Aufwand in „größeren Spielen“ exponentiell ansteigt, selbst in solch einfachen Spezialfällen wie in diesem Beispiel. Hinzu kommt, dass diese Notation ausschließlich aus Klammern und Strichen besteht und daher für den Leser unhandlich ist.
Aufgrund der Komplexität dieser Notation ist es einerseits für das Verständnis der Zusammenhänge sicherlich sinnvoll, mit möglichst vielen Beispielen zu arbeiten, die ohne diese Notation auskommen. Daher werden wir in der Folge sehr viel mit Bildern von konkreten Spielen arbeiten, um die allgemeinen Zusammenhänge verständlich visualisieren zu können. Andererseits können wir hier bereits die Notwendigkeit einer vereinfachten Schreibweise erkennen, auf die wir im späteren Verlauf noch zu sprechen kommen.

Aufgabe 8 Geben Sie die formale Definition des folgenden Hackenbush-Spiels $G =$ **BlauRot,Rot** an. Bestimmen Sie zudem, wer dieses Spiel gewinnt.



$G =$ **BlauRot,Rot**

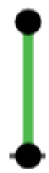
3.2 Die disjunkte Summe

Nun, da geklärt ist, wie ein Kurzspiel definiert ist, wollen wir überlegen, wie wir solche Spiele im Allgemeinen sinnvoll verknüpfen können. Die Idee dabei ist, dass wir zwei beliebige Kurzspiele G und H nebeneinander legen, sodass die Spieler pro Zug in jeweils einem dieser Spiele ziehen können, sofern dort noch ein Zug möglich ist. Wird in G gezogen, so bleibt H unverändert. Dies gilt für einen Zug in H analog. Es gewinnt, wer den letzten gültigen Zug macht. Diese Verknüpfung bezeichnen wir als **disjunkte Summe** von zwei Kurzspielen G und H. Die disjunkte Summe wollen wir im Folgenden formal definieren, sodass sie der rekursiven Definition eines Kurzspiels genügt. Ein Kurzspiel hatten wir durch die Menge aller Optionen für die Spieler*innen Blau und Rot charakterisiert. Wir betrachten im Folgenden, welche Optionen Blau in der disjunkten Summe $G + H$ hat:
Wenn ohne Beschränkung der Allgemeinheit Blau einen Zug macht, muss Blau zunächst entscheiden, ob dieser Zug in G oder in H erfolgen soll. Entscheidet sich Blau dazu, in G zu ziehen, so zieht Blau die Komponente G der Summe auf ein Element aus G^B, wobei $G = \{G^B \mid G^R\}$. Die Komponente H ändert sich dabei nicht. Sollte Blau in H ziehen, so gilt dasselbe analog mit $H = \{H^B \mid H^R\}$. Die möglichen Optionen für Blau sind dann wieder durch eine disjunkte Summe definiert, wodurch sich allgemein für die disjunkte Summe folgende rekursive Definition ergibt:

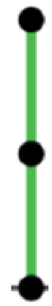
Definition 3.2 Für zwei Kurzspiele G und H sei die disjunkte Summe $G + H$:

$$G + H := \{G^B + H,\ G + H^B \mid G^R + H,\ G + H^R\}$$

In dieser Definition steht die Aufzählung über Kommaschreibweise für die Vereinigung aller Optionen. An dieser Stelle wollen wir uns ein Beispiel aus neutralem Hackenbush bzw. NIM anschauen um die disjunkte Summe besser zu verstehen. Dabei verwenden wir nun eine etwas kürzere Schreibweise für die einzelnen Kurzspiele bzw. die blauen und roten Optionen. Wir schreiben jetzt nur noch 0 für das Nullspiel 0 ={|} und benennen Spiele auf der niedrigeren Rekursionsebene und verwenden diese in der formalen Notation, um Übersichtlichkeit zu wahren. Dazu betrachten wir zunächst die beiden Spiele:



Grün = {0|0}



GrünGrün={0,Grün|0,Grün}

Die Anwendung unserer Definition der disjunkten Summe führt zu:

Grün+GrünGrün
= {0+GrünGrün, Grün+0, Grün+Grün | 0+GrünGrün, Grün+0, Grün+Grün}

Um dieses Spiel angeben zu können, müssen wir also herausfinden, wie die disjunkten Summen **0+GrünGrün**, **Grün+0** und **Grün+Grün** aussehen. Bei den Spielen **0+GrünGrün** und **Grün+0** ist das einfach, da das Nullspiel weder blaue noch rote Optionen bietet und somit nur in dem jeweils anderen Spiel gezogen werden kann. Die Rekursion endet nach einem Schritt und es folgt:

0+GrünGrün = **GrünGrün**, sowie **Grün+0** = **Grün**

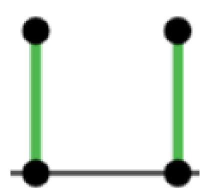
Für das Spiel **Grün+Grün** müssen wir erneut die Rekursion anwenden:

Grün+Grün = {0+Grün,Grün+0 | 0+Grün,Grün+0}

Grün+0 haben wir jedoch bereits oben als **Grün** identifiziert, dasselbe funktioniert analog für **0+Grün**. Wir können also auch schreiben:

Grün+Grün = {Grün | Grün}

In Hackenbush entspricht dies folgendem Spiel, welches wir auch als Grün,Grün bezeichnen:



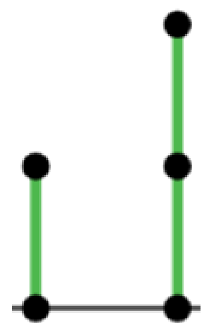
Grün+Grün = {Grün|Grün} = Grün,Grün

Nun können wir in unserer ursprünglichen disjunkten Summe die gefundenen Identitäten ersetzen und stellen fest:

Grün+GrünGrün = {GrünGrün, Grün, (Grün,Grün) | GrünGrün, Grün, (Grün,Grün)}

Die Klammerung bei (Grün,Grün) dient dabei nur der Übersichtlichkeit hinsichtlich der Trennung der einzelnen Optionen. (Grün,Grün) ist also eine Option des Spiels Grün+GrünGrün.

Dieses Beispiel illustriert die rekursive Definition der disjunkten Summe und wir können erkennen, dass die disjunkte Summe von zwei Kurzspielen G und H diese einfach nebeneinander legt und sie als zwei Komponenten eines neues Spiels $G + H$ auffasst. Wenn wir uns unser Beispiel nun noch einmal genau ansehen, stellen wir fest, dass die in **Grün+GrünGrün** entstandenen Optionen genau denen entsprechen, die wir erwarten würden. Je nachdem wer anfängt, kann man entweder in der Komponente **Grün** auf **0** ziehen und die Komponente **GrünGrün** unverändert lassen, oder in **GrünGrün** auf **Grün** oder **0** ziehen und **Grün** unverändert lassen. In Hackenbush sieht das folgendermaßen aus:



Grün+GrünGrün

Wir wollen nun kurz Eigenschaften der disjunkten Summe betrachten.

Lemma 3.3 *Die disjunkte Summe ist kommutativ und assoziativ.*

Beweis Aus Symmetriegründen der Definition ist die disjunkte Summe offensichtlich kommutativ.

Für den Beweis der Assoziativität seien nun G, H und I Kurzspiele. Wir beweisen induktiv:

IA: Wir setzen $G = H = I$ als das leere Spiel. Somit gilt die Assoziativität trivialerweise.

IV: Für alle Optionen eines Kurzspiels sei die disjunkte Summe assoziativ.

IS:

$$\begin{aligned}(G+H)+I &= \{G^B + H,\ G + H^B \mid G^R + H,\ G + H^R\} + \{I^B \mid I^R\}\\ &= \{(G^B + H) + I, (G + H^B) + I, (G + H) + I^B \mid (G^R + H) + I, (G + H^R) + I, (G + H^R) + I, (G + H) + I^R\}\\ &\overset{\text{IV}}{=} \{G^B + (H + I), G + (H^B + I), G + (H + I^B) \mid G^R + (H + I), G + (H^R + I), G + (H^R + I), G + (H + I^R)\}\\ &= \{G^B \mid G^R\} + \{H^B + I, H + I^B \mid H^R + I, H + I^R\}\\ &= G + (H + I)\end{aligned}$$

Der entscheidende Punkt bei diesem Beweis ist, dass man die Induktionsvoraussetzung einsetzen darf, da wir uns immer mit einem Spiel G, H oder I auf einer Rekursionsebene „tiefer" befinden, sodass diese bereits erfüllt ist. □

Der Induktionsanfang über das leere Spiel ist immer trivial und wird im Folgenden bei Beweisen ähnlicher Natur dementsprechend weggelassen.

Im Folgenden können wir verkürzt $m \cdot G$ schreiben, wenn das Spiel G m-mal disjunkt auf das leere Spiel addiert wird.

Aufgabe 9 Machen Sie sich mit der formalen Darstellung der disjunkten Summe vertraut, indem Sie für die beiden Spiele G und H die disjunkte Summe $G + H$ explizit aufschreiben.

$$G = \textbf{Grün} = \{0|0\} = \{\{|\}\big|\{|\}\} \text{ und } H = \textbf{Blau} = \{0|\} = \{\{|\}\big|\}$$

3.3 Die Äquivalenzrelation $\equiv$ auf $\mathcal{G}$

In der Gruppe $\mathcal{G}$ wollen wir mit Kurzspielen „rechnen“ können. Dazu werden wir jedem Spiel ein Maß, den „Spielwert“, zuordnen, welcher angibt, wie stark ein*e bestimmte*r Spieler*in in diesem Spiel begünstigt ist. Dies bedeutet insbesondere auch, dass zwei unterschiedliche Spiele, die aber denselben Spielenden in genau gleichem Maße begünstigen, auch denselben „Spielwert“ erhalten sollten. Wir müssen also im Anschluss unsere Äquivalenzrelation so konstruieren, dass all solche Spiele jeweils in derselben Äquivalenzklasse liegen. Unsere Äquivalenzrelation wird also gebildet durch die Menge der Kurzspiele **modulo** „Spielwert“, d.h. Spiele mit dem selben Spielwert werden miteinander identifiziert.

Um die Äquivalenzrelation formal definieren zu können, benötigen wir also zuerst einmal den „Spielwert“. Dieser soll uns als Maß dafür dienen, wie stark ein konkretes Spiel den Ausgang eines Spiels (ggf. auch negativ) begünstigt. Dafür betrachten wir zunächst, welche möglichen Ausgänge ein Kurzspiel haben kann:

Im Fall von NIM haben wir bereits gesehen, dass entweder die erste Spielerin ihren Sieg garantieren kann, oder aber, dass der zweite Spieler garantiert gewinnen kann.
In Hackenbush jedoch sind uns auch Spiele begegnet, die Blau/Rot immer gewinnen kann, unabhängig davon, wer beginnt. Uns sind also bereits vier mögliche Ausgänge von einem Kurzspiel G bekannt. Wir schreiben:
$o(G) = E$, wenn die erste Spielerin einen Sieg erzwingen kann
$o(G) = Z$, wenn der zweite Spieler einen Sieg erzwingen kann
$o(G) = B$, wenn Blau einen Sieg erzwingen kann
$o(G) = R$, wenn Rot einen Sieg erzwingen kann

Im Folgenden werden wir zeigen, dass jedes Kurzspiel genau einen dieser vier Ausgänge hat:

Theorem 3.4 (Fundamentalsatz)
Wenn Blau zuerst zieht, gibt es genau zwei verschiedene Möglichkeiten, die sich gegenseitig ausschließen
1. *Blau kann als erste Spielerin einen Sieg erzwingen* ***oder***
2. *Rot kann als zweiter Spieler einen Sieg erzwingen*

Beweis Wir beweisen wiederum per Induktion:

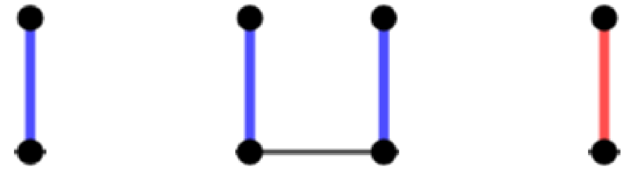
IA: Betrachte das leere Spiel. Blau hat als erste Spielerin keinen gültigen Zug, somit gewinnt Rot als zweiter Spieler garantiert.

IV: Der Fundamentalsatz gelte für alle Spiele in M_n.

IS: $n \to n+1$
Sei G ein Element aus M_{n+1}. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beginnt Blau. Dann zieht Blau auf eine Option aus M_n. In dieser zieht als nächstes Rot. Da der Fundamentalsatz nach (IV) dort bereits gilt, kann entweder Rot als erster Spieler einen Sieg erzwingen, oder Blau als zweite Spielerin. Da dies für jede Option aus M_n der Fall ist, kann Blau als erste Spielerin einen Sieg erzwingen, wenn es eine Option in G^B gibt, bei der Blau als zweite Spielerin einen Sieg erzwingen kann. Ist dies nicht der Fall, so kann Rot für jede Option, die Blau auswählt, einen Sieg erzwingen. □

Es gibt also genau vier mögliche Ausgänge für ein Kurzspiel. Spiele mit $o(G) = B$, in denen Blau einen Sieg erzwingen kann, begünstigen dabei Blau am meisten. Spiele mit $o(G) = R$ sind dagegen am ungünstigsten für Blau, da Rot dort einen Sieg erzwingen kann. Bei Spielen mit $o(G) = E$ bzw. $o(G) = Z$ kann Blau gewinnen, wenn Blau zuerst ($o(G) = E$) bzw. als zweites ($o(G) = Z$) spielt. Blau wird weder positiv noch negativ begünstigt.

Man könnte nun als naiven Ansatz versuchen, alle Spiele mit demselben Ausgang in eine Äquivalenzklasse zu zwängen. Dies würde jedoch zu Problemen mit der Gruppenverknüpfung, der disjunkten Summe, führen. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel in Hackenbush:

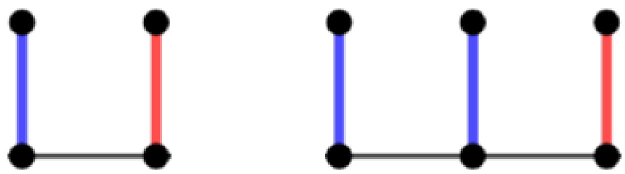


G_1 G_2 G_3

Gegeben seien die Spiele $G_1 = \{0|\}$ und $G_2 = \{G_1|\}$. In G_1 hat Blau die einzige Option, auf das leere Spiel zu ziehen, während Rot keine mögliche Zugoption hat. Somit kann Blau dieses Spiel garantiert gewinnen. In G_2 hat Blau die Option auf G_1 zu ziehen, während Rot wiederum keine gültige Zugoption hat. Somit begünstigen beide Spiele Blau und es gilt:

$$o(G_1) = o(G_2) = B$$

Wir verknüpfen nun die Spiele G_1 und G_2 mit dem Spiel G_3={ |0} wie im Bild.



$G_1 + G_3$ $G_2 + G_3$

Es gilt $o(G_1 + G_3) = Z$, denn es gewinnt offensichtlich der zweite Spieler, da die erste Spielerin nur eine Option hat und der zweite Spieler dann sofort gewinnen kann. Aber ebenso gilt $o(G_2 + G_3) = B$, denn wenn Blau beginnt, zieht Blau auf $G_1 + G_3$, dieses ist nach nach vorheriger Betrachtung aber ein Sieg für den zweiten Spieler, was wieder Blau ist, da Rot als nächstes ziehen muss. Beginnt Rot, so gibt es nur einen möglichen Zug auf das Spiel G_2, welches Blau immer gewinnt:
So gesehen begünstigt G_2 Blau mehr als G_1. Denn wir haben ein Spiel G_3 gefunden, das wir per disjunkter Summe mit G_1 bzw. G_2 verknüpfen können, sodass sich der Ausgang im einen Fall ändert (von B auf Z), im anderen Fall aber nicht (von B auf B). Wir haben also festgestellt, dass unterschiedliche Spiele zwar den gleichen Ausgang haben können, aber Blau in unterschiedlichem Maße begünstigen.

Würden wir die Äquivalenzrelation also nach diesem naiven Ansatz konstruieren, so wäre die disjunkte Summe keine wohldefinierte Verknüpfung mehr. Wir müssen daher die Definition unserer Äquivalenzrelation so anpassen, dass wir denselben Ausgang für alle Repräsentanten einer Klasse erhalten, wenn wir auf diese jeweils ein beliebiges Kurzspiel X addieren:

Definition 3.5 Seien G und H Kurzspiele. Dann schreiben wir:

$$G \equiv H \Leftrightarrow o(G + X) = o(H + X)\ \forall X \in \hat{M}.$$

Diese Relation zwischen zwei Kurzspielen soll als Äquivalenzrelation dienen, um durch die Äquivalenzklassen die Elemente unserer Gruppe zu erhalten.

Lemma 3.6 *$\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\hat{M}$.*

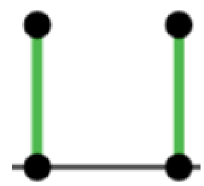
Beweis Es ist zu zeigen, dass $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Offensichtlich gilt für je zwei beliebige Kurzspiele G und X:
$o(G+X) = o(G+X) \Rightarrow G \equiv G$

Symmetrie: Sei $G \equiv H$, dann gilt $o(G+X) = o(H+X)\ \forall X \in \hat{M}$. Aufgrund der Symmetrie von = gilt also auch $o(H+X) = o(G+X) \quad \forall X \in \hat{M} \Rightarrow H \equiv G$

Transitivität: Seien $G \equiv H$ und $H \equiv J$, dann gilt $o(G+X) = o(H+X)$ und $o(H+X) = o(J+X)$ für alle $X \in \hat{M}$. Aufgrund der Transitivität von = gilt also auch $o(G+X) = o(J+X)$ $\forall X \in \hat{M} \Rightarrow\ G \equiv J$ □

Doch wie genau können zwei unterschiedliche Spiele aussehen, die in derselben Äquivalenzklasse liegen? Dazu betrachten wir zum Einen das leere Spiel und zum Anderen das Spiel **Grün+Grün**:



Grün+Grün

Lemma 3.7 ***Grün+Grün*** $\equiv$ ***0***

Beweis Sei **X** ein beliebiges Kurzspiel. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass gilt:

$$o(0+X) = o((\textbf{Grün+Grün})+\mathbf{X}).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beginne Blau. Aus dem Fundamentalsatz wissen wir, dass entweder Blau im Spiel **X** einen Sieg erzwingen kann, oder Rot.

Fall 1:
Blau kann als erste Spielerin im Spiel **X** einen Sieg erzwingen. Trivialerweise kann Blau dies dann auch im Spiel **0+X** mit derselben Vorgehensweise tun. Im Spiel **(Grün+Grün)+X** spielt Blau zunächst in **X** nach ihrer üblichen Vorgehensweise. Solange Rot mit einem Spielzug in der Komponente **X** reagiert, fährt sie auf diese Weise fort. Sobald Rot stattdessen einen Zug in **Grün+Grün** macht, reagiert sie, indem sie ebenfalls in dieser Komponente zieht. Dadurch zieht sie diese Komponente auf das leere Spiel und übergibt Rot in der anderen Komponente dieselbe Situation wie zu ihrem vorherigen Zug, der Teil ihrer Taktik ist, mit der sie einen Sieg in X garantieren kann.

Fall 2:
Rot kann als zweiter Spieler einen Sieg in **X** erzwingen. Trivialerweise kann Rot dies also auch in **0+X**. Blau kann nun als erste Spielerin entweder in der Komponente **X** ziehen, oder aber in **Grün+Grün**. Zieht sie in **X**, so reagiert Rot in **X** gemäß der Weise, mit der er im Spiel **X** den Sieg erzwingen kann, zieht sie jedoch in **Grün+Grün**, so tut Rot dies ebenfalls und zieht diese Komponente damit auf das leere Spiel.

In beiden Fällen gilt: $o(\mathbf{0}+\mathbf{X}) = o((\mathbf{Grün}+\mathbf{Grün})+\mathbf{X}) = o(\mathbf{X})$. Da X ein beliebiges Spiel war, folgt **Grün+Grün** ≡ **0**. □

Aufgabe 10

a) Finden Sie zwei unterschiedliche, bzgl. ≡ äquivalente Hackenbush-Spiele, von denen mindestens eines jede Strichfarbe (grün, rot, blau) mindestens einmal enthält. Zeigen Sie zudem, dass die beiden Spiele äquivalent sind.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Spiele G = **Grün** und H = **GrünBlauRot** nicht äquivalent sind.

G = **Grün**

H = **GrünBlauRot**

Das Ziel dieses Kapitels war es, Kurzspiele mit einer Gruppenstruktur zu versehen. Dafür haben wir nun als Elemente der Trägermenge die Äquivalenzklassen von $\hat{M}/\equiv$ definiert. Jetzt müssen wir uns noch einmal genauer mit der Gruppenverknüpfung befassen. Der/dem aufmerksamen Leser*in mag aufgefallen sein, dass die disjunkte Summe, so wie wir sie bisher definiert hatten, auf Kurzspielen, nicht aber auf den Äquivalenzklassen definiert ist. Für unsere Gruppe ist es aber nötig, dass wir Äquivalenzklassen miteinander verknüpfen, die Eigenschaften der disjunkten Summe sollen bei dieser Verknüpfung aber erhalten bleiben. Unser Vorteil dabei ist, dass die Äquivalenzrelation genau so definiert wurde, dass die disjunkte Summe repräsentantenunabhängig funktioniert. Dies bedeutet, dass jeweils ein beliebiger Vertreter aus zwei Äquivalenzklassen gewählt werden kann und die Summe dieser beiden Vertreter unabhängig von dieser Wahl immer in derselben Äquivalenzklasse liegt . Die disjunkte Summe ist also auch über unseren Äquivalenzklassen wohldefiniert und daher als

Gruppenverknüpfung geeignet, weiterhin werden die bereits gezeigten Eigenschaften Assoziativität (bzw. Kommutativität) vererbt.
Wir hatten bereits erwähnt, dass die Äquivalenzklasse, die das leere Spiel bzw. das Nullspiel enthält, als neutrales Element fungieren soll. Dies gilt offensichtlich, da das Nullspiel selbst bezüglich der disjunkten Summe auf Kurzspielen neutral operiert. Mit der Wohldefiniertheit der disjunkten Summe auf den Äquivalenzklassen folgt somit, dass die gesamte Äquivalenzklasse des Nullspiels dort neutral operiert. Abschließend fehlt uns zur Vervollständigung der Gruppe noch die Überprüfung der Existenz von inversen Elementen.

Bevor wir uns auf die Suche nach inversen Elementen begeben, benötigen wir noch das folgende sehr nützliche Theorem.

Theorem 3.8 *Sei G ein Kurzspiel. Gilt $o(G) = Z$, so ist bereits $G \equiv 0$.*

Beweis Die Idee hier ist ähnlich wie bei der Äquivalenz von **Grün+Grün** und **0** aus dem vorigen Beweis. Wir müssen für ein beliebiges Kurzspiel X und ein Kurzspiel G mit $o(G) = Z$ zeigen, dass gilt:

$$o(G + X) = o(0 + X) = o(X)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beginne Blau. Wir müssen erneut zwei Fälle betrachten.

Fall 1:
Blau kann als erste Spielerin einen Sieg in X (bzw. $0 + X$) erzwingen. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass sie dies dann auch in $G + X$ tun kann. Dafür geben wir eine passende Gewinnstrategie für Blau an. Blau beginnt mit einem Zug in X, gemäß der Taktik, mit welcher sie in dieser Komponente einen Sieg erzwingen kann. Rot kann dann entweder mit einem Zug in der Komponente X oder in G reagieren. Zieht Rot in X, so fährt Blau mit ihrer Taktik in X fort. Sobald Rot das erste Mal in G zieht (dies geschieht spätestens, nachdem Blau in Spiel X den letzten gültigen Zug macht und somit diese Komponente „gewinnt “), existiert in dieser Komponente für Blau eine Taktik, mit der sie dort den Sieg erzwingen kann, da sie dort als zweite Spielerin zieht. Ihre allgemeine Taktik ist es daher nun, immer in der Komponente zu antworten, in der Rot zuvor gespielt hat, und zwar gemäß der jeweiligen Gewinnstrategie. Dementsprechend macht sie in jeder Komponente den letzten Zug und erzwingt einen Sieg in $G + X$.

Fall 2:
Rot kann als zweiter Spieler einen Sieg in X erzwingen. Analog zu Fall 1 geben wir nun eine Taktik an, nach der Rot einen Sieg in $G + X$ erzwingen kann. Zu Beginn zieht Blau entweder in X oder in G. Zieht Blau in X, so kann Rot dort als Zweites ziehen und hat somit eine Taktik, dort einen Sieg zu erzwingen. Zieht Blau in G, so hat Rot auch hier

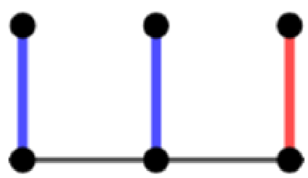
eine solche Taktik, da $o(G) = Z$. Die allgemeine Taktik von Rot ist es daher, immer in der Komponente zu antworten, in der Blau zuvor gespielt hat. Auf diese Weise macht Rot in jeder dieser Komponenten den letzten Zug und gewinnt daher das Spiel $G + X$. □

Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit bemerken, wie enorm hilfreich dieser unscheinbare Satz ist, da dieser es uns erlaubt, alleine durch den Ausgang eines Spiels zu entscheiden, ob es bezüglich der disjunkten Summe neutral in der Gruppe ist. Sobald unsere Gruppe vollständig definiert ist, können wir Äquivalenzen von Spielen spürbar einfacher überprüfen, indem wir durch geeignete Umformungen mit dem Ausgang des Nullspiels vergleichen.

3.4 Zueinander inverse Spiele

Wir wollen nun überprüfen, ob die Menge unserer Äquivalenzklassen mit der disjunkten Summe als Verknüpfung und der Äquivalenzklasse des leeren Spiels $[0]$ als neutralem Element tatsächlich eine Gruppe ist. Die Assoziativität und die Existenz des neutralen Elements sind an dieser Stelle bereits offensichtlich. Die Abgeschlossenheit von Kurzspielen bzgl. der disjunkten Summe folgt direkt aus der Definition. Es bleibt also noch zu überprüfen, ob jedes Element der Trägermenge $[\hat{M}] := \hat{M}/\equiv$ auch ein eindeutiges inverses Element in dieser Menge hat.

Wir betrachten im Folgenden eine beliebige Äquivalenzklasse $[G]$ mit einem Repräsentanten G. Wir suchen nun ein passendes Kurzspiel $-G$, sodass $G + (-G) \equiv 0$. An dieser Stelle können wir Theorem 3.8 verwenden. Wir suchen also $-G$, sodass das Spiel $o(G + (-G)) = Z$. Um ein Gefühl für das Inverse $-G$ zu entwickeln, betrachten wir zunächst ein simples Hackenbush-Spiel und versuchen das Inverse zu konstruieren.



G

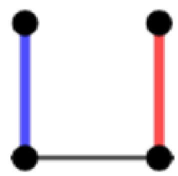
An diesem Beispiel erkennt man leicht, dass das Spiel in dem wir die Farben tauschen die passende Eigenschaft hat. Der zweite Spieler kann durch Anwenden der Spiegelbildstrategie dann einen Sieg für sich garantieren:

$G + (-G)$

Um diese Erkenntnis von Hackenbush auf Kurzspiele verallgemeinern zu können, müssen wir herausfinden, welche Gegebenheiten nötig sind, um die Spiegelbildstrategie so wie oben anwenden zu können. Dazu genügt es jedoch, wenn der zweite Spieler in $-G$ dieselben Optionen hat wie die erste Spielerin in G und umgekehrt. Dies wollen wir nun einmal formal gemäß der rekursiven Definition von Kurzspielen notieren:

Definition 3.9 $-G := \{-G^R \mid -G^B\}$

Diese Rekursion wollen wir uns zunächst einmal an einem weiteren simplen Beispiel in Hackenbush veranschaulichen. Dazu betrachten wir das Spiel G= **Blau,Rot**:



G = **Blau,Rot**

In der formalen Notation schreiben wir: G ={**Rot**|**Blau**} mit **Rot**={|0} und **Blau**={0|}. $-G$ ist jetzt definiert als $-G = \{-G^R| - G^L\} = \{-\mathbf{Blau}| - \mathbf{Rot}\}$. Wir benötigen also noch die Inversen von **Rot** und **Blau**. Da **Rot**={|0} und das Nullspiel trivialerweise selbstinvers ist, liefert erneutes Einsetzen in die Definition des inversen Spiels **-Rot** = {0|} = **Blau**. Analog gilt **-Blau** = {|0} = **Rot**. Durch Einsetzen in die anfängliche Gleichung folgt:

$$-G = \{-\mathbf{Blau}\big| - \mathbf{Rot}\} = \{\mathbf{Rot}\big|\mathbf{Blau}\} = \{\{|0\}\big|\{0|\}\} = G$$

Wir haben also durch explizites Einsetzen in die rekursive Definition die Farben getauscht, wie in unserem intuitiven Beispiel vorher. Insbesondere ist in diesem speziellen Fall G selbstinvers. Im Folgenden verwenden wir $G-H$ als verkürzte Schreibweise für $G+(-H)$ für zwei beliebige Kurzspiele G und H.

Theorem 3.10 *Für ein beliebiges Kurzspiel G gilt:* $G + (-G) \equiv 0$.

Beweis Wir zeigen die Aussage induktiv. Sei dazu G ein beliebiges Kurzspiel, für dessen Optionen die Aussage bereits gilt. Per Definition gilt:

$$G = \{G^B \mid G^R\};$$

$$-G = \{-G^R \mid -G^B\}$$

Wir berechnen nun $G + (-G)$ mit Hilfe der Definition der disjunkten Summe:

$$G + (-G) = \{G^B - G, G - G^R | G^R - G, G - G^B\}$$

Um zu zeigen, dass $G + (-G)$ äquivalent zum leeren Spiel ist, reicht es nach Theorem 3.8 zu zeigen, dass $o(G + (-G)) = Z$. Um dies zu beweisen, betrachten wir die oben notierten Mengen der blauen und roten Optionen in $G + (-G)$. Dazu führen wir uns vor Augen, dass in jeder blauen Option Rot einen Sieg erzwingen kann, und ebenso Blau in jeder roten Option. Dies bedeutet, dass der zweite Spieler in jedem Fall gewinnt. Wir betrachten folgende vier Fälle:

Fall 1:
Blau beginnt und zieht auf ein Spiel aus:

$$G^B - G = \{(G^B)^B - G, G^B - G^R | (G^B)^R - G, G^B - G^B\}$$

Da Blau begonnen hat, zieht Rot als Nächster, und zwar auf ein Spiel aus $G^B - G^B$, welches nach Voraussetzung äquivalent zum leeren Spiel ist. Dadurch erzwingt Rot als zweiter Spieler einen Sieg.

Fall 2:
Blau beginnt und zieht auf ein Spiel aus:

$$G - G^R = \{G^B - G^R, G + (-G^R)^B | G^R - G^R, G + (-G^R)^R\}$$

Hier zieht Rot ebenfalls als Nächster, diesmal auf ein Spiel aus $G^R - G^R$, welches ebenfalls äquivalent zum leeren Spiel ist.

Fall 3:
Rot beginnt und zieht auf ein Spiel aus:

$$G - G^B = \{G^B - G^B, G + (-G^B)^B | G^R - G^B, G + (-G^B)^R\}$$

Da in diesem Fall Rot begonnen hat, zieht nun Blau als Nächste. Sie zieht auf ein Spiel aus $G^B - G^B$, welches nach Voraussetzung äquivalent zum leeren Spiel ist, und erzwingt auf diese Weise ihren Sieg.

Fall 4:
Rot beginnt und zieht auf ein Spiel aus:

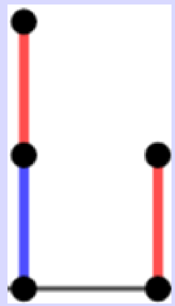
$$G^R - G = \{(G^R)^B - G, G^R - G^R | (G^R)^R - G, G^R - G^B\}$$

In diesem Fall zieht Blau ebenfalls als Nächste, nämlich auf ein Spiel aus $G^R - G^R$. Dies ist äquivalent zum Nullspiel und sie gewinnt.

Durch die Fallunterscheidung haben wir gesehen, dass es egal ist, wer mit welchem Zug beginnt, die zweite Person kann immer einen Sieg erzwingen. Daher gilt $o(G + (-G)) = Z$ und somit auch $G + (-G) \equiv 0$. □

Aufgrund der symmetrischen Situation von Blau und Rot hätte es in diesem Beweis insbesondere auch genügt, nur die ersten beiden Fälle zu betrachten.

Aufgabe 11 Geben Sie die formale Definition des Inversen des folgenden Hackenbush-Spiels G an:



Wie sieht $-G$ in Hackenbush aus?

Aufgabe 12 Wenden Sie die Definition des inversen Spiels an, um $-G$ zu bestimmen.

$$G = \{\{\{|\{|\}\}|\{\{|\}|\}\}\Big|\{\{\{|\}|\}|\}\}$$

Wir haben nunmehr die Existenz eines inversen Elements für ein beliebiges Kurzspiel G gezeigt. Wir zeigen nun noch kurz, dass dieses bis auf Äquivalenz bzgl. $\equiv$ eindeutig ist.

Lemma 3.11 *Sei G ein beliebiges Kurzspiel. Dann ist das inverse Element eindeutig bzgl.* $\equiv$.

Beweis Angenommen, es existieren $G_1, G_2 \in \hat{M}$ *mit* $G + G_1 \equiv 0 \equiv G + G_2$. Dann gilt:
$G_1 \equiv G_1 + 0 \equiv G_1 + (G + G_2) \equiv (G_1 + G) + G_2 \equiv (G + G_1) + G_2 \equiv 0 + G_1 \equiv G_2$ □

Diese Aussage ist insofern trivial, da Eindeutigkeit des Inversen in jeder Gruppe gilt. Dies erkennt man im Beweis auch daran, dass ausschließlich die Eigenschaft des neutralen Elements sowie die Assoziativität der Verknüpfung genutzt wurden, welche zu den Gruppenaxiomen gehören und somit in jeder Gruppe vorhanden sind.

Mit der Konstruktion der Menge $[\hat{M}]$ und den gezeigten Eigenschaften der disjunkten Summe zusammen mit der Äquivalenzklasse des Nullspiels $[0]$ und dem inversen Element $[-G]$ können wir nun allerdings ohne weiteren Beweis feststellen:

Theorem 3.12 $\mathcal{G}$*:=(*$[\hat{M}], +, [0]$*)* *ist eine abelsche Gruppe.*

Damit haben wir das Ziel dieses Kapitels erreicht. Durch die Tatsache, dass wir die Menge der Äquivalenzklassen von Kurzspielen $[\hat{M}]$ mit einer Gruppenstruktur versehen haben, lassen sich Kurzspiele in den folgenden Kapiteln einfacher untersuchen. Bevor wir uns dem zuwenden, wollen wir aber uns aber noch einige spannende bzw. hilfreiche Eigenschaften anschauen.

Dazu betrachten wir zunächst das NIM-Spiel als Vertreter von unparteiischen Spielen. Es wird schnell klar, dass ein bestimmtes NIM-Spiel zu sich selbst invers ist, da man das Spiel einfach noch einmal hinzuaddieren könnte und der zweite Spieler unter Anwendung der Spiegelbildstrategie einen Sieg garantieren kann. Dies wollen wir nun auf jedes unparteiische Spiel verallgemeinern.

Lemma 3.13 *Jedes unparteiische Kurzspiel ist selbstinvers.*

Beweis Dies gilt offensichtlich, da für jedes unparteiische Kurzspiel G mit den Optionen G^B und G^R Folgendes gilt:

$$G^B = G^R$$

Somit gilt bei Einsetzen der rekursiven Definition des Inversen ebenfalls:

$$-G^R = -G^B$$

Daraus folgt:

$$-G = G \qquad \square$$

Intuitiv hätte man vielleicht erwartet, dass der Ausgang des inversen Spiels „gegensätzlich" zum Ausgang des ursprünglichen Spiels sein könnte. Das würde bedeuten, dass man annimmt, dass falls $o(G) = B \Rightarrow o(-G) = R$ und falls $o(G) = E \Rightarrow o(-G) = Z$. Diese naive Intuition stimmt allerdings nur bezüglich B und R, da einerseits E und Z gar keine Gegensätze sind, andererseits kann dies auch wegen Lemma 3.13 gar nicht möglich sein, da beispielsweise ein NIM-Spiel selbstinvers ist und für ein NIM-Spiel G immer $o(G) = E$ oder $o(G) = Z$ gilt. Dies überträgt sich dann natürlich auch auf $-G$. Noch offensichtlicher wird dies anhand des leeren Spiels 0, dessen Inverses ebenfalls wieder das leere Spiel 0 ist. Wir wollen uns nun anschauen, in welcher Beziehung die Ausgänge des inversen Spiels $-G$ zum ursprünglichen Spiel G stehen.

Lemma 3.14 *Sei G ein beliebiges Kurzspiel. Dann gilt:*

a) $o(G) = B \Leftrightarrow o(-G) = R$
b) $o(G) = R \Leftrightarrow o(-G) = B$
c) $o(G) = E \Leftrightarrow o(-G) = E$
d) $o(G) = Z \Leftrightarrow o(-G) = Z$

Beweis
von a): Sei $o(G) = B$. Durch den Fundamentalsatz wissen wir bereits, dass $o(-G) \in \{B, E, Z, R\}$. Wenn wir also zeigen können, dass für den Ausgang $o(-G) \notin \{B, E, Z\}$, dann muss der Ausgang $o(-G) = R$ sein. Wir unterscheiden also drei Fälle, welche wir zu einem Widerspruch zu $o(G - G) = o(0) = Z$ führen wollen:

Fall 1:
Angenommen $o(-G) = B$. Wir betrachten das Spiel $G + (-G)$. Blau kann sowohl in G als auch in $-G$ einen Sieg erzwingen, unabhängig davon wer beginnt. Falls Blau beginnt,

eröffnet sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Spiel in G mit einem Zug gemäß der Gewinnstrategie mit welcher sie einen Sieg als erste Spielerin in G erzwingen kann. Jedes mal, wenn Rot einen Zug in G macht, antwortet Blau gemäß dieser Gewinnstrategie. Dies ist immer möglich, da $o(G) = B$. Zieht Rot jedoch in $-G$, so reagiert Blau dort gemäß der Gewinnstrategie, mit welcher sie als zweite Spielerin den Sieg erzwingen kann. Somit zieht sie in jeder Komponente zuletzt und gewinnt das Spiel. Also gilt:

$$o(G + (-G)) = B \neq Z = o(0) \;\lightning$$

Fall 2:
Angenommen $o(-G) = E$. Wir betrachten erneut das Spiel $G + (-G)$. Falls Blau beginnt, dann zieht Blau zuerst in $-G$ gemäß der exitierenden Gewinnstrategie für die beginnende Spielerin. Jedes mal, wenn Rot einen Zug in $-G$ macht, antwortet Blau gemäß dieser Gewinnstrategie. Dies ist immer möglich, da $o(-G) = E$. Zieht Rot jedoch in G, so reagiert Blau dort gemäß der Gewinnstrategie, mit welcher sie als zweite Spielerin den Sieg erzwingen kann. Dies ist möglich, da $o(G) = B$. Somit zieht sie in jeder Komponente zuletzt und gewinnt das Spiel. Wenn Blau also als erste Spielerin ihren Sieg erzwingen kann, muss gelten:

$$o(G + (-G)) \in \{B, E\} \text{ und } \{B, E\} \cap \{Z\} = \emptyset \;\lightning$$

Fall 3:
Angenommen $o(-G) = Z$. Dann gilt: $-G \equiv 0$. Weiterhin gilt:

$$Z = o(0) = o(G + (-G)) = o(G + 0) = o(G) = B \;\lightning$$

Also muss $o(-G) = R$ sein.

von b): Sei $o(G) = R$. Der Beweis verläuft aus Symmetriegründen analog zu a). Und es gilt: $o(G) = R \Leftrightarrow o(-G) = B$.

von c): Sei $o(G) = E$. Wegen a) wissen wir, dass $o(-G) \notin \{B, R\}$, da $o(G) = o(-(-G)) = R$ wäre, wenn $o(-G) = B$ gelten würde, und umgekehrt. Angenommen $o(-G) = Z$. Dann ist $-G \equiv 0$ und gilt:

$$Z = o(0) = o(G + (-G)) = o(G + 0) = o(G) = E \;\lightning$$

Also gilt: $o(G) = E \Leftrightarrow o(-G) = E$

von d): Sei $o(G) = Z$. Dann gilt $G \equiv 0$. Dann ist:

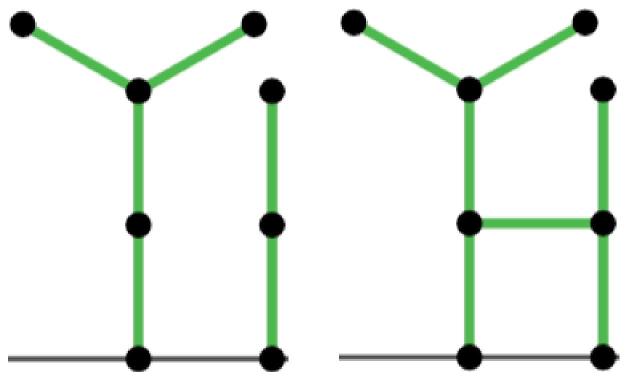
$$Z = o(0) = o(G + (-G)) = o(0 + (-G)) = o(-G)$$

Die $\Leftrightarrow$ Beziehung folgt aus der Implikation direkt dadurch, dass $-(-G) \equiv G$ $\square$

3.5 Spannende Eigenschaften von unparteiischen Spielen in $\mathcal{G}$

In Kapitel 2 hatten wir die Regelsets von NIM und Hackenbush vorgestellt. Wir möchten nun unser Wissen um die Gruppenstruktur von $\mathcal{G}$ nutzen, um Aussagen bzgl. NIM und Hackenbush zu treffen und gegebenenfalls sogar ein konkretes Regelset zu lösen. Wir hatten bereits Grünes-Hackenbush als Variante erwähnt, in der ausschließlich grüne Striche vorhanden sind.

Definition 3.15 Wir bezeichnen ein Grünes Hackenbush-Spiel als **Wald**, wenn jeder Strich durch einen eindeutigen Pfad von Strichen mit der Grundlinie verbunden ist.



Wald **Kein Wald**

Wir wollen nun die Einschränkung von Grünem-Hackenbush auf Wälder mithilfe unseres Äquivalenzbegriffs und dem Wissen um die Gruppe $\mathcal{G}$ lösen. Dafür benötigen wir das folgende kleine Lemma über NIM:

Lemma 3.16 *Für zwei NIM-Spiele G und H mit NIM-Werten a_G und a_H gilt:*

$$G \equiv H \Leftrightarrow a_G = a_H$$

Beweis Nach Lemma 3.13 wissen wir, dass G und H selbstinvers sind. Also gilt:
$G - H = G + (-H) = G + H$. Des Weiteren folgt aus Theorem 3.8, dass:

$$o(G - H) = Z \Leftrightarrow G - H \equiv 0 \Leftrightarrow G \equiv H$$

Nun können wir Lemma 3.16 direkt zeigen:

$$G \equiv H \Leftrightarrow o(G - H) = Z \Leftrightarrow o(G + H) = Z \Leftrightarrow a_G \oplus a_H = 0 \Leftrightarrow a_G = a_H. \qquad \square$$

Wir haben also gezeigt, dass NIM-Spiele mit identischem NIM-Wert äquivalent sind. Dies wollen wir nun nutzen, um zu einem beliebigen Wald ein äquivalentes NIM-Spiel zu finden bzw. einen Algorithmus anzugeben, der dies in endlicher Zeit tut. Dann wäre die Einschränkung von Grünem Hackenbush auf Wälder gelöst, da NIM in Kapitel 2 bereits gelöst wurde.

Theorem 3.17 *Jeder Wald ist äquivalent zu genau einem NIM-Stapel.*

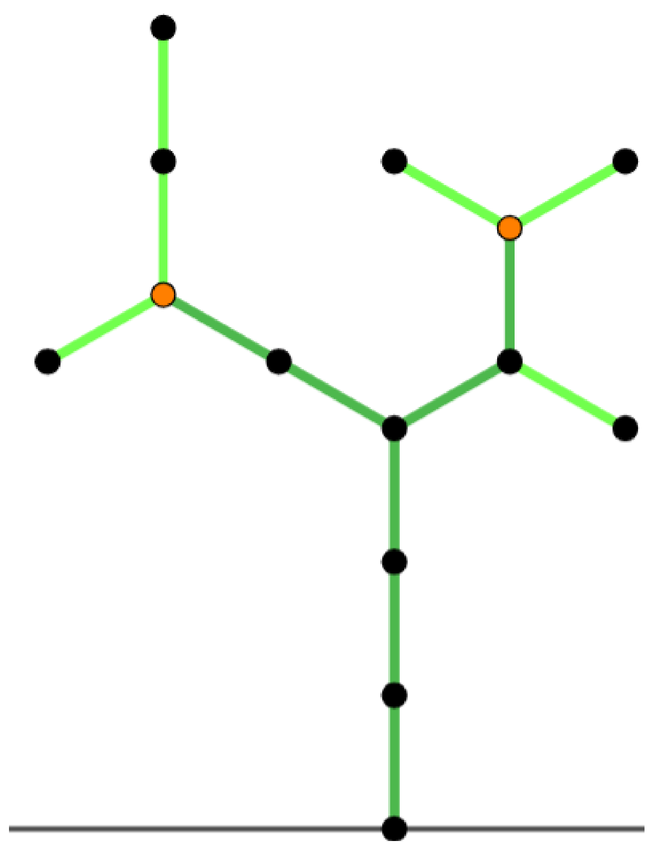
Um dieses Lemma zu beweisen, führen wir zunächst der Einfachheit halber ein paar neue Begriffe ein:

Baum:
Eine Zusammenhangskomponente eines Walds nennen wir **Baum**.

Pfad:
Eine Folge von Knoten, die durch jeweils einen grünen Strich direkt miteinander verbunden sind, nennen wir **Pfad**.

Zweig:
Einen Pfad, in dem kein Knoten mit mehr als zwei weiteren Knoten des Baums über jeweils einen grünen Strich direkt verbunden ist, kein Knoten die Grundlinie berührt und genau ein Knoten nur einen grünen Strich berührt, nennen wir **Zweig**.

Astgabel:
Einen Knoten, in dem ausschließlich Zweige mit einem Pfad zur Grundlinie verbunden werden, bezeichnen wir als **Astgabel**.



Baum mit **Zweigen** und **Astgabeln**

Beweis Für den entsprechenden Beweis zeigen wir, dass jeder einzelne Baum aus dem Wald W einem eindeutigen NIM-Stapel entspricht. Der gesamte Wald entspricht dann dem NIM-Stapel mit demselben NIM-Wert wie das NIM-Spiel bestehend aus den erhaltenen Stapeln der Bäume, denn diese Spiele sind nach Lemma 3.16 äquivalent.
Betrachten wir also zunächst einen beliebigen Baum B. Wir nehmen an, dass er Zweige hat, da die Aussage sonst trivial wäre. Dann muss B auch mindestens eine Astgabel A besitzen. Wir betrachten nun A sowie alle Zweige, die mit A verbunden sind. Wir können uns nun mit wenig Aufwand veranschaulichen, dass wir alle mit A verbundenen Zweige durch einen einzelnen Zweig Z ersetzen können, ohne den Ausgang von W zu beeinflussen. Dafür nehmen wir der Einfachheit halber an, dass ausschließlich in den mit A verbundenen Zweigen gespielt wird (entfernt man die Verbindung von A mit der Grundlinie, fällt alles, was von A gestützt wird, völlig gleichgültig, ob es sich um Z oder die ursprünglichen Zweige handelt). Dies erlaubt es uns, die mit A verbundenen Zweige als einzelne Komponente von W aufzufassen.
Nun interpretieren wir die einzelnen mit A verbundenen Zweige als Stapel eines NIM-Spiels. Die Anzahl an Knoten in den Zweigen liefern die entsprechenden Größen dieser Stapel. Wenn wir dieses NIM-Spiel nun durch das äquivalente NIM-Spiel ersetzen, welches aus nur einem Stapel besteht, dann ändert sich der Ausgang von W nicht, weil es für den Ausgang äquivalenter Spiele per Definition keine Rolle spielt, welche anderen Komponenten noch vorhanden sind. Mit anderen Komponenten sind hier sowohl der Rest von B als auch alle weiteren Bäume in W gemeint. Auf diese Weise fahren wir an allen Astgabeln fort und ersetzen diese durch Zweige. Dadurch erhalten wir einen Baum, der äquivalent zum ursprünglichen Baum B ist.
Eventuell haben wir nun weitere Astgabeln an Knoten erzeugt, an denen vorher keine waren. An diesen können wir jedoch analog fortfahren. Da es insgesamt nur endlich viele Knoten gibt, und Knoten, die durch dieses Verfahren bereits untersucht wurden, nicht erneut zu Astgabeln werden, werden wir irgendwann eine letzte Astgabel betrachten. Diese wird dann in einen einzelnen NIM-Stapel umgewandelt, der äquivalent zum ursprünglichen Baum B ist. Damit ist die gesamte Aussage gezeigt. □

Korollar 3.18 *Da wir jeden Wald in ein gleichwertiges NIM-Spiel überführen können, ist auch diese Einschränkung von Grünem Hackenbush nun gelöst.*

Korollar 3.19 *Das Vorgehen im Beweis ermöglicht es uns, zu jedem Wald einen zugehörigen NIM-Wert zu bestimmen.*

Aufgabe 13 Vereinfachen Sie den oben abgebildeten Baum schrittweise zu einem gleichwertigen NIM-Stapel.

Wir können sogar noch einen Schritt weiter gehen und einen der wichtigsten Sätze über unparteiische Kurzspiele beweisen, den sogenannten **Satz von Sprague-Grundy**. Der Satz von Sprague-Grundy verallgemeinert obige Aussage auf beliebige unparteiische Kurzspiele, allerdings liefert er nur den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit des NIM-Wertes, nicht jedoch, wie man diesen direkt bestimmt. Bevor wir zum Theorem kommen benötigen wir aber noch ein wenig Handwerkszeug:

Definition 3.20 Sei $S \subsetneq \mathbb{N}$ eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen. Wir definieren die **kaz** (kleinste ausgeschlossene Zahl) wie folgt:

$$kaz(S) := min\{\mathbb{N}_0 \setminus S\}$$

Wir schreiben im Folgenden vereinfacht $G \equiv *m$, wenn G äquivalent zu einem NIM-Stapel der Länge m ist. Da wir unparteiische Kurzspiele untersuchen, sind die Optionen für Rot und Blau identisch. Statt die Optionen beider Spieler separat aufzuzählen, genügt es, die Menge der Optionen einmal anzugeben. $G = \{*a_1, *a_2, ..., *a_k\}$ bedeutet dann, dass G das Spiel ist, in welchem die nächste Spielerin als Optionen die Spiele zur Verfügung hat, die äquivalent sind zu NIM-Stapeln der Länge $*a_1, *a_2, ..., *a_k$.

Lemma 3.21 (kaz-Regel)
Seien $a_1, a_2, ...a_k \in \mathbb{N}$ *und sei* $G = \{*a_1, *a_2, ..., *a_k\}$
Dann ist $G \equiv *m$ *, wobei* $m = kaz\{a_1, a_2, ...a_k\}$

Beweis Um die kaz-Regel zu beweisen, wollen wir zeigen, dass $G + H \equiv 0$, wobei H ein NIM-Stapel der Länge m ist. Da $-H \equiv H$, ist dies nur möglich, wenn $G \equiv H$, und somit den NIM-Wert m_2 haben muss.
Hierfür genügt es nach Theorem 3.8 zu zeigen, dass $o(G + H) = Z$. Die erste Spielerin kann entweder in G oder in H beginnen:

Fall 1: Sie zieht in G
In G zieht sie auf jeden Fall auf ein Spiel, was äquivalent ist zu einem NIM-Stapel mit Länge $a_i, i \in \{1, ..., k\}$ mit dazugehörigem NIM-Wert $\hat{a}_i$. Da nun aber m per Definition von $kaz\{a_1, a_2, ...a_k\}$ ungleich a_i für alle i aus $\{1, ..., k\}$, ist $\hat{m} \oplus \hat{a}_i \neq 0$. Nach Boutons Theorem kann nun der zweite Spieler seinen Sieg erzwingen.

Fall 2: Sie zieht in H
In H kann sie auf jeden NIM-Stapel mit Länge $m' < m$ ziehen. Aufgrund der Minimalität von m ist dann $m' = a_i$ für ein passendes i. Der zweite Spieler kann dann in G auf genau das Spiel ziehen, welches äquivalent zu dem NIM-Stapel mit der passenden Länge a_i ist. Dadurch zieht er auf ein Spiel mit NIM-Wert $\hat{a}_i \oplus \hat{m'} = \hat{a}_i \oplus \hat{a}_i = 0$ und kann somit seinen Sieg erzwingen. □

Theorem 3.22 (Satz von Sprague-Grundy)
Jedes unparteiische Kurzspiel ist äquivalent zu einem eindeutigen NIM-Stapel und besitzt daher einen NIM-Wert $\hat{m}$.

Beweis Beweis per Induktion: Sei G ein beliebiges unparteiisches Kurzspiel. Angenommen, alle Optionen $G'_1, ..., G'_k$ von G haben einen NIM-Wert, sind also äquivalent zu einem NIM-Stapel mit ebendiesem Wert. Dann können wir schreiben: $G \equiv \{*a_1, ..., *a_k\}$. Nach der kaz-Regel hat dann auch G einen NIM-Wert m_2 mit $m = kaz\{a_1, ..., a_k\}$. □

Abschließend wollen uns nun noch die Gruppe $\mathcal{G}$ eingeschränkt auf ein konkretes Spiel, NIM, betrachten. Dafür nennen wir $\hat{M}_{NIM}$ die Einschränkung von $\hat{M}$ auf alle Spiele, deren Optionen durch ein NIM-Spiel zustande kommen. Analog nennen wir $[\hat{M}_{NIM}]$ die Menge der Äquivalenzklassen, die sich durch NIM-Spiele erzeugen lassen. Weiterhin nennen wir $+_{NIM}$ die daraus resultierende Einschränkung der disjunkten Summe.

Theorem 3.23 $\mathcal{G}_{NIM} := ([\hat{M}_{NIM}], +_{NIM}, [0])$ *ist eine Untergruppe von* $\mathcal{G}$.

Ist zudem die Stapelgröße der NIM-Spiele durch eine obere Schranke $n \in \mathbb{N}$ begrenzt, so ist $\mathcal{G}_{NIM_n} := ([\hat{M}_{NIM_n}], +_{NIM_n}, [0])$ *isomorph zu* $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^p$*, wobei* $p = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

Beweis Die Abgeschlossenheit bzgl. $+_{NIM}$ gilt offensichtlich, da die disjunkte Summe zweier NIM-Spiele wiederum ein NIM-Spiel ist. Das leere Spiel ist als neutrales Element ebenfalls erhalten. Da NIM ein unparteiisches Kurzspiel ist, folgt mit Lemma 3.13, dass das inverse Spiel ebenfalls ein NIM-Spiel ist.

Um den zweiten Teil der Aussage zu beweisen, genügt es zu betrachten, dass die Gruppe $\mathcal{G}_{NIM_n}$ offensichtlich 2^p Elemente besitzt. Darüber hinaus ist jedes Element aus $\mathcal{G}_{NIM_n}$ selbstinvers. Die Gruppe $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^p$ erfüllt genau diese Eigenschaften und ist somit ein geeigneter Kandidat. Nun stellt sich die Frage, ob dies (bis auf Isomorphie) die einzige Gruppe mit diesen Eigenschaften ist. Dies ist der Fall, da der Struktursatz über endliche abelsche Gruppen besagt, dass jede endliche abelsche Gruppe (eindeutiges) direktes Produkt zyklischer Gruppen ist.

Dieses Wissen über Gruppen ist allerdings gar nicht nötig, um die Isomorphie von $\mathcal{G}_{NIM_n}$ und $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^p$ zu erkennen. Jede natürliche Zahl n besitzt nämlich höchstens $p = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ Ziffern in Binärdarstellung, die Elemente von $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^p$ bestehen aus einer geordneten Menge von p Nullen und Einsen. Des Weiteren entspricht die Addition auf $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ genau der Verknüpfung $\oplus$. Da wir es mit p-Tupeln zu tun haben, werden in $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^p$ zwei Elemente jeweils stückweise gemäß der Ordnung im p-Tupel verknüpft, also der erste Eintrag des einen

Elements mit dem ersten des anderen etc. Diese Verknüpfung entspricht genau der bitweisen $\oplus$-Verknüpfung von Binärzahlen. $\square$

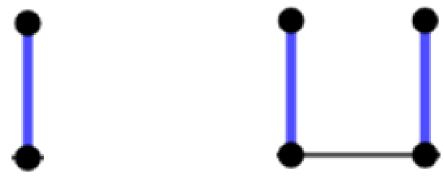
Um die Gruppe $\mathcal{G}$ nutzbar zu machen, wollen wir sie im nächsten Kapitel mit einer Ordnungsstruktur ausstatten, die uns dann erlauben soll Spiele dahingehend miteinander zu vergleichen, wie stark sie einen konkreten Spielenden begünstigen. Später können wir dann den einzelnen Äquivalenzklassen konkrete Spielwerte zuweisen und sofern möglich Analogien zu den uns bekannten Zahlen herstellen.

Kapitel 4
Die Ordnung von $\mathcal{G}$

Durch Kapitel 3 sind wir nun in der Lage, Kurzspiele formal zu beschreiben. In der Folge werden wir der Einfachheit halber die Gruppenelemente $[G] \in \mathcal{G}$ durch ein Kurzspiel G als Vertreter identifizieren. Unser Ziel ist es jedoch nicht nur, Spiele mathematisch beschreiben zu können, sondern vor allem, besser zu spielen. Haben wir nun (ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Blau) ein konkretes Spiel G vor uns liegen, in dem wir einen Zug machen sollen, so müssen wir uns für eine der möglichen Optionen aus G^B entscheiden. Da es unser Ziel ist, das Spiel am Ende zu gewinnen, sollten wir uns dabei für die Option entscheiden, die unseren Sieg am stärksten begünstigt.
Das Ziel in diesem Kapitel ist es, uns eine Ordnung auf $\mathcal{G}$ zu definieren, die uns solche Entscheidungen erleichtert. Die Idee dieser Ordnung ist, dass wir für zwei Kurzspiele G und H festsetzen, dass $G \geqq H$, wenn G den Sieg von Blau mindestens so stark oder stärker begünstigt als H.
Da unser Gegner seinen nächsten Zug nicht zwingend in derselben Komponente des Spiels macht, in der wir zuvor gezogen haben, ist es für unsere Ordnungsrelation wichtig, dass sie unabhängig davon funktioniert, wer als Nächstes an der Reihe ist. Wir wollen also zwei Kurzspiele G und H miteinander vergleichen können, ohne die Information zu haben, ob Blau oder Rot in diesen den nächsten Zug machen werden.

4.1 Die partielle Ordnung $\geqq$ auf $\mathcal{G}$

Da wir die Spiele in Abhängigkeit davon, wessen Sieg sie begünstigen, ordnen wollen, ist es zunächst sinnvoll, deren Ausgang hinzuzuziehen. An dieser Stelle müssen wir jedoch vorsichtig sein, denn zwei Spiele können denselben Ausgang haben, aber trotzdem als Komponenten eines größeren Spiels Blau unterschiedlich stark begünstigen. Dazu betrachten wir nun die folgende Spiele G und H:

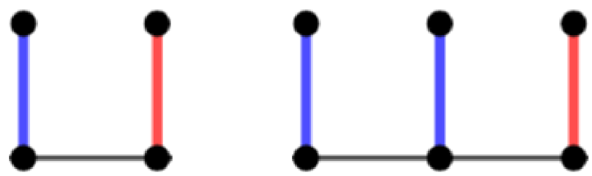


G= **Blau** H= **Blau,Blau**

Die beiden Spiele G und H sind nicht äquivalent bzgl. der Äquivalenzrelation ≡ aus Kapitel 3. Beide Spiele begünstigen jeweils Blau. Es gilt also:

$$o(G) = o(H) = B$$

Intuitiv würde man davon ausgehen, dass das Spiel H Blau mehr begünstigt als G. Dies kann man sich veranschaulichen, indem wir beispielsweise auf beide Spiele diesselbe Komponente J= **Rot** addieren. Nun betrachten wir die Ausgänge der so entstandenen Spiele $G + J$ und $H + J$.



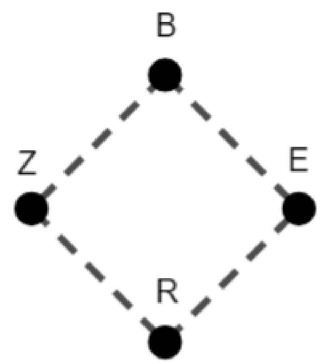
$G + J$= **Blau,Rot** $H + J$=**Blau,Blau,Rot**

Offensichtlich gilt für die Ausgänge:

$$o(G + J) = Z \neq B = o(H + J)$$

Insbesondere sehen wir hier auch noch, dass die beiden Spiele G und H damit natürlich nicht äquivalent sind, da ein Spiel J existiert, sodass für die Ausgänge gilt: o($G + J$) ≠ o($H + J$).

In diesem Beispiel erscheint es also intuitiv sinnvoll zu sagen, dass $H \geqq G$. Allgemein wollen wir für zwei beliebige Kurzspiele G und H festsetzen, dass $G \geqq H$ ist, wenn der Ausgang von G für Blau günstiger oder gleich ist als der von H, auch wenn wir zu beiden Spielen beliebige andere Komponenten hinzufügen. Dazu müssen wir zunächst einmal feststellen, wie günstig die möglichen Ausgänge für Blau sind. Offensichtlich ist B der günstigste Ausgang für Blau, da Blau immer gewinnt, und R anaolg der ungünstigste. E und Z können wir nicht miteinander vergleichen, da wir nicht wissen, ob Blau zuerst spielen wird. Dennoch ist klar, dass E und Z besser für einen Sieg von Blau sind als R, aber schlechter als B. Wir schreiben $B > E, B > Z, B > R, E > R$ und $Z > R$. Wir schreiben zusätzlich $o(G) \geq o(H)$, wenn $o(G) > o(H)$ oder $o(G) = o(H)$.



Die Ordnung auf den Ausgängen von Spielen

Übertragen wir nun diese Ordnung auf der Menge der Ausgänge auf die Menge der Kurzspiele, so ergibt sich folgende Definition:

Definition 4.1 Seien G, H Kurzspiele. Wir sagen, dass $G \geqq H$, wenn $o(G + X) \geq o(H + X)$ für alle Kurzspiele X gilt.

Lemma 4.2 $\geqq$ *ist eine partielle Ordnung auf* $\mathcal{G}$.

Beweis Zu zeigen sind Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität.

Reflexivität: Nach Definition 3.5 von $\equiv$ gilt: $G \equiv G$. Somit ist $o(G + X) = o(G + X)$ für alle Kurzspiele X und insbesondere $o(G + X) \geq o(G + X)$ und damit $G \geqq G$.

Antisymmetrie: Seien G, H Kurzspiele und $G \geqq H$. Dann gilt $o(G + X) \geq o(H + X)$ für alle Kurzspiele X.
Für ein beliebiges Kurzspiel X ist dann

$$(o(G + X), o(H + X)) \in$$
$$\{(B, B), (B, E), (B, Z), (B, R), (E, E), (E, R), (Z, Z), (Z, R), (R, R)\}$$

Da zusätzlich $H \geqq G$, gilt analog:

$$(o(G + X), o(H + X)) \in$$
$$\{(B, B), (E, B), (E, E), (Z, B), (Z, Z), (R, B), (R, E), (R, Z), (R, R)\}$$

Also liegt $(o(G + X), o(H + X))$ im Schnitt dieser beiden Mengen:

$$(o(G + X), o(H + X)) \in \{(B, B), (E, E), (Z, Z), (R, R)\}$$

Paare wie (E, Z) oder (Z, E) tauchen nicht auf, da unsere Ordnungsrelation auf den Ausgängen zwischen diesen beiden Ausgängen nicht definiert ist. Diese können nämlich ohne das Wissen, wer anfängt, nicht sinnvoll miteinander verglichen werden. An dieser Stelle wird bereits deutlich, dass unsere Ordnungsrelation auf $\mathcal{G}$ nicht linear ist.
Für jedes beliebige Kurzspiel X gilt also, dass $o(G + X) = o(H + X)$. Also folgt $G \equiv H$.

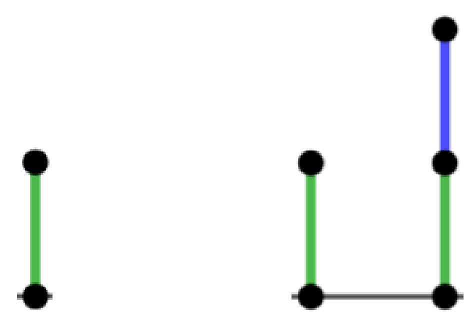
Transitivität: Seien G, H, J Kurzspiele mit $J \geqq H \geqq G$. D.h. für ein beliebiges Kurzspiel X ist $o(J+X) \geq o(H+X)$ und $o(H+X) \geq o(G+X)$. Die Ordnung $\geq$ auf den Ausgängen ist per Konstruktion transitiv und vererbt sich auf $\geqq$. □

Definition 4.3 Falls für zwei Kurzspiele G und H gilt, dass $G \geqq H$, aber nicht $G \equiv H$, so schreiben wir $G \rhd H$.

Aus der Definition 3.5 von $\equiv$ folgt, dass die Ordnung $\geqq$ genauso auf Äquivalenzklassen von Spielen funktioniert. Um zwei Äquivalenzklassen miteinander zu vergleichen betrachten wir einfach jeweils einen Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen und vergleichen diese mit $\geqq$. Wenn $G \geqq H$, dann können wir auch auch $[G] \geqq [H]$ schreiben.

4.2 Wir verschwurbeln Spiele!

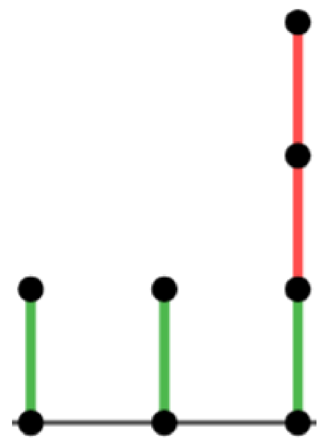
Wir haben also eine Möglichkeit, bestimmte Kurzspiele dahingehend miteinander zu vergleichen, ob und welches einen Sieg von Blau mehr begünstigt. Die Frage ist nun, ob diese Vergleichsmöglichkeit für beliebige Kurzspiele funktioniert. Wir hatten zuvor bereits erwähnt, dass es nicht sinnvoll ist, Spiele G und H miteinander zu vergleichen, die einen Ausgang von $o(G) = E$ und $o(H) = Z$ oder $o(G) = Z$ und $o(H) = E$ haben. Allerdings sind Spiele dieser Art nicht die einzigen, die sich nicht durch $\geqq$ ordnen lassen. Wir betrachten nun die beiden Standard-Hackenbush-Spiele G= **Grün** und H = **Grün,GrünBlau**:



G = **Grün** H=**Grün,GrünBlau**

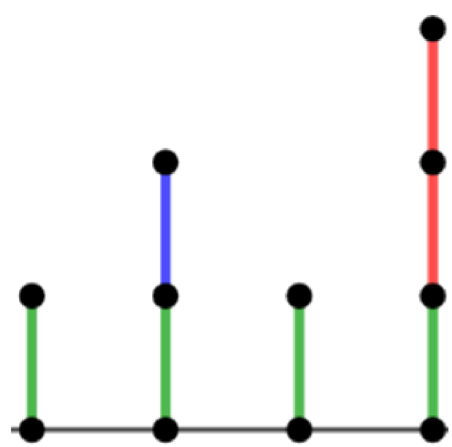
Betrachten wir den Ausgang der jeweiligen Spiele, stellen wir fest, dass einerseits $o(G) = E$ und andererseits $o(H) = B$. Ersteres ist offensichtlich. Um sich Letzteres zu vergegenwärtigen, betrachten wir zwei Fälle:
Im Fall, dass Blau beginnt, entfernt Blau den einzigen blauen Strich und kann damit einen Sieg erzwingen. Im Fall, dass Rot beginnt, muss Rot einen der grünen Striche entfernen und entfernt somit einen kompletten Stapel. D.h. Blau kann im nächsten Schritt den letzten Stapel komplett entfernen und gewinnt. In der Ordnung auf den Ausgängen von Kurzspielen gilt also offensichtlich $o(H) > o(G)$. Als einzelne Komponenten begünstigt H Blau also mehr als G. Intuitiv würden wir davon ausgehen, dass dies auch unter beliebiger Addition weiterer

Komponenten X der Fall bleibt. Allerdings trügt hier die Intuition. Betrachten wir dazu das Spiel X = **Grün,GrünRotRot**. Addieren wir nun jeweils X als zusätzliche Komponenten auf G bzw. H, erhalten wir einerseits:



$G + X$ = **Grün,Grün,GrünRotRot**

Im letzten Kapitel hatten wir gezeigt, dass **Grün,Grün**$\equiv 0$. Somit ist $G + X \equiv$ **GrünRotRot**. Es genügt also den Ausgang $o($**GrünRotRot**$)$ zu betrachten. Dieses Spiel gewinnt die erste Spielerin durch Entfernen des einzigen grünen Striches, unabhängig davon, ob Blau oder Rot beginnt. Es gilt also $o(G + X) = E$
Für $H + X$ erhalten wir hingegen:



$H + X$ = **Grün,GrünBlau,Grün,GrünRotRot**

Analog zu $G + X$ genügt es auch hier nur den Ausgang $o($**GrünBlau,GrünRotRot**$)$ zu untersuchen. Wir müssen hierbei wiederum unterscheiden, ob Blau beginnt oder nicht.
Angenommen, Blau beginnt. Dann hat Blau drei mögliche Optionen:

Möglichkeit 1: Blau entfernt den einzigen blauen Strich. Dann entfernt Rot den unteren roten Strich und zieht damit auf **Grün,Grün**. Dies ist äquivalent zum leeren Spiel, wodurch Rot gewinnt.
Möglichkeit 2: Blau entfernt den grünen Strich unter dem blauen Strich. Dann entfernt Rot anschließend den verbliebenen grünen Strich und gewinnt das Spiel.

Möglichkeit 3: Blau entfernt den grünen Strich unter den roten Strichen. Analog zu Möglichkeit zwei gewinnt Rot das Spiel.

Beginnt Blau, kann Rot also immer einen Sieg erzwingen.
Wenn hingegen Rot zuerst zieht, so entfernt Rot den obersten roten Strich. In dem verbliebenen Spiel kann Rot dann mit der Spiegelbildstrategie einen Sieg erzwingen.
Rot gewinnt also in jedem Fall, daher gilt $o(H + X) = R$.

Doch was genau bedeutet das jetzt für unsere Ordnung? Bezüglich der Ausgänge ist H eindeutig günstiger für Blau als G, die Ausgänge von G und H sind in der Ordnung $\geq$ vergleichbar. Trotzdem sind G und H selbst in der Ordnung $\geqq$ **nicht** vergleichbar, da die Ausgänge unterschiedliche Spieler*innen begünstigen können, wenn wir G und H als Komponenten eines größeren Spiels interpretieren. Wir haben einen Fall gefunden, in dem gilt: $o(H) > o(G)$, aber $o(G + X) > o(H + X)$ für ein Kurzspiel X. Für die Spiele G und H gilt also weder $G \geqq H$, noch $H \geqq G$, obwohl die betrachteten Ausgänge miteinander vergleichbar waren.
Allgemein schreiben wir bei Kurzspielen G und H, die nicht mit $\geqq$ verglichen werden können: $G \not\lesseqgtr H$ beziehungsweise $H \not\lesseqgtr G$.

Definition 4.4 Zwei Kurzspiele G und H heißen **miteinander verschwurbelt** ($\not\lesseqgtr$), wenn weder $G \geqq H$ noch $H \geqq G$. Wir schreiben dann: $G \not\lesseqgtr H$.
Wir schreiben weiterhin:
$G \blacktriangleright H$, falls $G \rhd H$ oder $G \not\lesseqgtr H$ und
$G \blacktriangleleft H$, falls $G \lhd H$ oder $G \not\lesseqgtr H$.

Korollar 4.5 *Für zwei nicht äquivalente Kurzspiele G und H gilt immer genau eine der drei Beziehungen $G \geqq H$, $G \not\lesseqgtr H$ oder $G \leqq H$.*

Es mag auffallen, dass wir auf den letzten Seiten sehr viele unterschiedliche Zeichen definiert haben. Diese sind allerdings notwendig, um Eindeutigkeit zu gewährleisten, da sich die Ordnung auf den Ausgängen von Spielen von der Ordnung auf (Äquivalenzklassen von) Kurzspielen unterscheidet. Wenn wir nur ein Zeichen verwendet hätten, würde mitunter nicht klar werden, ob wir zu einem bestimmten Zeitpunkt Ausgänge oder Spiele miteinander vergleichen. Dies könnte ansonsten auch in den noch folgenden Erklärungen und Beweisen zu Unklarheiten für den Leser sorgen.

4.3 Geschicktes Vergleichen von Kurzspielen gemäß $\geqq$

Da wir in dem vorherigen Beispiel gesehen haben, wie wichtig die Addition von weiteren möglichen Komponenten für den Vergleich von zwei Kurzspielen ist, es zusätzlich allerdings extrem mühsam ist, alle solche Möglichkeiten in Betracht zu ziehen, suchen wir nach einer Möglichkeit, den Vergleich dieser Spiele zu erleichtern. Im vorangegangenen Kapitel haben wir bereits erkannt, dass wir ein Kurzspiel G auf Äquivalenz zum Nullspiel überprüfen können, indem wir $o(G)$ bestimmen. Es liegt auf der Hand, dass eine ähnliche Überlegung auch für $\geqq$ beziehungsweise $\not\lesseqgtr$ aufgrund der strukturell ähnlichen Definitionen von $\equiv$ und $\geqq$ möglich sein könnte. Dafür wollen wir zunächst die Beziehungen zwischen beliebigen Kurzspielen G und dem leeren Spiel 0 offen legen.

Theorem 4.6 *Sei G ein beliebiges Kurzspiel. Dann gilt:*

a) $G \equiv 0 \Leftrightarrow o(G) = Z$
b) $G \rhd 0 \Leftrightarrow o(G) = B$
c) $G \lhd 0 \Leftrightarrow o(G) = R$
d) $G \not\lesseqgtr 0 \Leftrightarrow o(G) = E$

Beweis

von a): Dies folgt direkt aus Theorem 3.8

von b): Wir müssen einerseits zeigen, dass für ein Kurzspiel G mit $o(G) = B$ (d.h. insbesondere $G \not\equiv 0$) und ein beliebiges Kurzspiel X gilt:
$o(G + X) \geq o(0 + X)$. Da aber $o(0 + X) = o(X)$ genügt es zu zeigen, dass $o(G + X) \geq o(X)$. Dazu unterscheiden wir vier Fälle.

Fall 1: $o(X) = B$.
Dann gilt $o(G + X) = B$, da Blau für beide Komponenten eine Gewinnstrategie besitzt. Unabhängig davon wer beginnt, kann Blau auf jeden Zug von Rot in der entsprechenden Komponente gemäß dieser Strategie reagieren. Somit zieht Blau in beiden Komponenten zuletzt und gewinnt das Spiel. Somit gilt $o(G + X) = B \geq B = o(X)$.

Fall 2: $o(X) = R$.
Wir wissen, dass $o(G + X) \in \{B, R, E, Z\}$ und R ist bezüglich $\geq$ in dieser Menge minimal. Somit gilt $o(G + X) \geq o(X)$.

Fall 3: $o(X) = Z$.
Mit Theorem 3.8 wissen wir, dass $X \equiv 0$ und somit ist $o(G + X) = o(G) = B > Z = o(X)$.

Fall 4: $o(X) = E$.
Mit den bisherigen Überlegungen genügt es zu zeigen, dass $o(G + X) \in \{B, E\}$. Wir wollen nun zeigen, dass in $G + X$ entweder Blau einen Sieg erzwingen kann oder die erste Spielerin. Dafür zeigen wir zunächst, dass Blau ihren Sieg erzwingen kann, wenn sie beginnt. Die Gewinnstrategie von Blau ist es dann, in der Komponente X zu beginnen. Da $o(X) = E$, besitzt Blau in dieser dann eine Gewinnstrategie. Darüber hinaus besitzt Blau eine Gewinnstrategie in G. Egal in welcher Komponente Rot dann zieht, kann Blau immer

in derselben Komponente gemäß ihrer dortigen Gewinnstrategie reagieren. Analog zu Fall 1 gewinnt sie so das Spiel.
Jetzt verbleiben für den Fall, dass Rot beginnt noch zwei Fälle. Entweder Rot gewinnt als erster Spieler, oder aber Blau gewinnt als zweite Spielerin. Im ersten Fall gilt $o(G+X) = E$, im zweiten Fall gilt $o(G + X) = B$.

Andererseits müssen wir noch zeigen, dass aus $G \rhd 0$ folgt, dass $o(G) = B$. Wir wissen aus $G \rhd 0$, dass $o(G + X) \geq o(X)$ für alle Kurzspiele X, insbesondere auch für $X = 0$. Somit gilt $o(G + 0) \geq o(0) = Z$ und daher $o(G + 0) = o(G) \in \{B, Z\}$. Des Weiteren folgt aus $G \rhd 0$, dass $G \not\equiv 0$ und daher nach Theorem 3.8 auch $o(G) \neq Z$. Also gilt $o(G) = B$.

von c): Dies verläuft komplett analog zum Fall b). Wobei Rot und Blau sowie $\geq$ und $\leq$ die Rollen tauschen.

von d): Wir wissen, dass alle Kurzspiele in genau einer der vier Ausgangsklassen aus $\{E, Z, B, R\}$ liegen, und, dass jedes Kurzspiel G, für welches weder $G \geqq 0$ noch $G \leqq 0$ gilt, bereits $G \not\lesseqgtr 0$ erfüllt. Somit folgt d) direkt aus a), b) und c). □

Korollar 4.7 *Sei G ein beliebiges Kurzspiel. Dann gilt auch:*

e) $G \geqq 0 \Leftrightarrow o(G) \geq Z$
f) $G \leqq 0 \Leftrightarrow o(G) \leq Z$
g) $G \blacktriangleright 0 \Leftrightarrow o(G) \geq E$
h) $G \blacktriangleleft 0 \Leftrightarrow o(G) \leq E$

Beweis Diese vier Aussagen sehen unter Verwendung von Theorem 4.6 trivial aus. Allerdings wollen wir uns trotzdem kurz von der Korrektheit überzeugen. Dafür beweisen wir die erste Aussage noch einmal explizit. Die weiteren Aussagen lassen sich dann analog zeigen.

von e): $o(G) \geq Z \Leftrightarrow o(G) \in \{B, Z\} \xLeftrightarrow{4.6\ \text{a),b)}} G \equiv 0$ oder $G \rhd 0 \;\Leftrightarrow G \geqq 0.$ □

Mithilfe von Theorem 4.6 können wir nun beliebige Spiele mit dem leeren Spiel vergleichen, indem wir einfach deren Ausgänge betrachten. Dabei umgehen wir die Arbeit mit der eher unhandlichen Definition 4.1. Doch bisher gelingt uns das nur im direkten Vergleich mit dem leeren Spiel. Wir wollen uns nun zusätzlich die Gruppenstruktur von $\mathcal{G}$ zunutze machen, um den Vergleich zweier beliebiger Kurzspiele G und H zu ermöglichen:

Theorem 4.8 *Seien G, H Kurzspiele. Dann gilt:* $G \geqq H \Leftrightarrow o(G - H) \geq Z = o(0).$

Beweis Da $\geqq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{G}$ ist, gilt:

$$G \geqq H \Leftrightarrow G - H \geqq H - H \Leftrightarrow G - H \geqq 0$$ □

Nun können wir durch Bestimmen von $o(G - H)$ und $o(H - G)$ eindeutig entscheiden, ob $G \geqq H$, $G \leqq H$ oder $G \not\lesseqgtr H$. Tatsächlich können wir dadurch sogar noch genauer entscheiden, nämlich ob $G \rhd H$, $G \lhd H$, $G \equiv H$ oder $G \not\lesseqqgtr H$. Dazu bestimmen wir das geordnete Paar $(o(G-H), o(H-G))$. An dieser Stelle beobachten wir, dass $-(G-H) \equiv -G+H \equiv H-G$. Die beiden Spiele, deren Ausgänge wir im geordneten Paar betrachten, sind also invers zueinander. Daraus folgt mithilfe von Lemma 3.14:

$$(o(G-H), o(H-G)) \in \{(B,R), (R,B), (E,E), (Z,Z)\}$$

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass:

Theorem 4.9 *Seien G, H zwei beliebige Kurzspiele. Dann gilt:*

a) $G \rhd H \Leftrightarrow (o(G-H), o(H-G)) = (B,R)$
b) $G \lhd H \Leftrightarrow (o(G-H), o(H-G)) = (R,B)$
c) $G \equiv H \Leftrightarrow (o(G-H), o(H-G)) = (Z,Z)$
d) $G \not\lesseqqgtr H \Leftrightarrow (o(G-H), o(H-G)) = (E,E)$

Beweis
von a): Sei $G \rhd H$. Dann ist insbesondere $G \geqq H$. Mit Theorem 4.8 folgt, dass $o(G-H) \geq Z \Rightarrow o(G-H) \in \{B, Z\}$. Analog folgt, dass $o(H-G) \in \{R, Z\}$. Da wegen $G \rhd H$ bereits $G \not\equiv H$, folgt, dass $-H$ nicht invers zu G ist und somit $o(G-H) \neq o(0) = Z$, und analog auch $o(H-G) \neq Z$. Die Rückrichtung funktioniert analog unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $o(G-H) \neq Z \Leftrightarrow G \not\equiv H$.

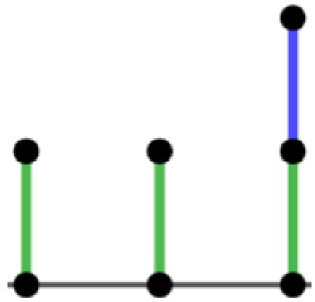
von b): Sei $G \lhd H$. Der Beweis verläuft aus Symmetriegründen analog zu dem aus a).

von c): Folgt direkt aus Theorem 3.8.

von d): Folgt aus a), b) und c), sowie dem Umstand, dass nur noch ein weiteres geordnetes Paar und eine weitere Beziehung zwischen G und H infrage kommt. □

Korollar 4.10 *Insbesondere fällt auf, dass es völlig ausreichend ist, den Ausgang $o(G-H)$ zu bestimmen, denn aus diesem lässt sich bereits eindeutig das benötigte geordnete Paar bestimmen. Für $o(G-H) = B$ ist $G \rhd H$, für $o(G-H) = R$ ist $G \lhd H$, für $o(G-H) = Z$ ist $G \equiv H$ und für $o(G-H) = E$ ist $G \not\lesseqqgtr H$.*

Zu Beginn des Kapitels hatten wir in einem Beispiel die beiden Spiele $G =$ **Grün** und $H =$ **Grün, GrünBlau** dahingehend untersucht, wie sich die beiden Spiele bzgl. $\geqq$ verhalten. Dabei haben wir ein Spiel X gefunden, dass bei Verknüpfung mit den jeweiligen Spielen G und H die Ausgänge bzgl. $\geq$ unterschiedlich verändert und sogar deren Priorisierung vertauscht. Für einen Vergleich diesbezüglich war es allerdings notwendig ein passendes Spiel X zu finden, sofern es existiert. Das ist unpraktikabel. Mit den neuen Erkenntnissen können wir das Beispiel erneut und sehr viel einfacher untersuchen.
Dazu bestimmten wir $o(H-G)$. Dabei stellen wir fest, dass in diesem Fall $(-G) = G$ und somit gilt $H - G = H + G = G + H$.



$G + H =$ **Grün,Grün,GrünBlau**

Nun ist unschwer zu erkennen, dass in $G+H$ immer die erste Spielerin gewinnt. Dazu entfernt sie den rechten grünen Strich und zieht somit auf ein Spiel, das äquivalent zum leeren Spiel ist. Daher gilt $o(H-G) = o(G+H) = E$ und somit $G \not\gtreqless H$.

Aufgabe 14 Sei $J = 0$ das leere Spiel und seien $G =$ **Grün** und $H =$ **Grün,GrünBlau** wie oben. Bestimmen Sie alle Beziehungen bzgl. $\geqq$, $\not\gtreqless$, $\equiv$ zwischen diesen drei Spielen.

Aufgabe 15 Finden Sie ein Hackenbush-Spiel G bestehend aus einem Stapel, dass mit dem Hackenbush-Spiel $H =$ **RotGrünBlau** verschwurbelt ist und beweisen Sie dies.

Aufgabe 16 Seien G, H und I Kurzspiele mit $G \not\gtreqless I$ und $H \not\gtreqless I$. Beweisen oder widerlegen Sie, ob $o(G+H-I) = Z$ immer gilt?

Wir haben nun Möglichkeiten gefunden, zwei Kurzspiele G und H miteinander zu vergleichen. Das heißt aber auch, dass es möglich sein muss, die einzelnen Optionen aus G^{B_i} bzw. G^{R_i} mit dem Spiel G selbst zu vergleichen, da bekanntlich jede Option selbst wieder ein Kurzspiel ist. Da die Ordnung auf $\mathcal{G}$ über die Ausgänge des Spiels sowie über perfekte Spielweise definiert ist, kann man sich klar machen, dass Blau bei ihrem Zug ihre Position entweder verschlechtert (bei nicht perfekter Spielweise) oder unangetastet lässt (bei perfekter Spielweise). Das bedeutet, dass $G^{B_i} \lhd G$, wenn sie nicht perfekt spielt. Bei perfekter Spielweise von Blau könnte man vermuten, dass $G^{B_i} \equiv G$ für jede blaue Option G^{B_i}. Da aber durch den Zug auf G^{B_i} der Startspieler wechselt, gilt tatsächlich $G^{B_i} \not\leqq G$.

Lemma 4.11 *Sei G ein Kurzspiel und G^{B_1} eine beliebige blaue Option von G, sowie G^{R_1} eine beliebige rote Option. Dann gilt: $G^{B_1} \blacktriangleleft G$ sowie $G^{R_1} \blacktriangleright G$.*

Beweis Wir beschränken uns darauf zu zeigen, dass $G^{B_1} \blacktriangleleft G$. Die andere Aussage folgt analog. Hierfür reicht es nach Lemma 4.9 zu zeigen, dass Rot in $G^{B_1} - G$ als erster Spieler einen Sieg erzwingen kann. Es gilt:

$$G = \{G^{B_1}, G^{B'} | G^R\},$$
$$-G = \{-G^R | -G^{B_1}, -G^{B'}\},$$
$$G^{B_1} - G = G^{B_1} + \{-G^R | -G^{B_1}, -G^{B'}\}$$

Nun können wir eine Gewinnstrategie für Rot als ersten Spieler angeben. Dazu zieht Rot zu Beginn in der Komponente $-G$ auf die Option $-G^{B_1}$. Dadurch zieht er im gesamten Spiel auf $G^{B_1} - G^{B_1}$. In diesem Spiel zieht er als zweites und kann dort mit der Spiegelbildstrategie seinen Sieg erzwingen.

Aufgabe 17 Sei G ein beliebiges Hackenbush-Spiel bei dem bei genau einem Strich S die Farbe nicht bekannt ist. Dieser Strich kann entweder blau, rot, grün oder aber gar nicht existent sein. Zeigen Sie, dass die partielle Ordnung zwischen den Spielen $G_{leer}, G_{blau}, G_{rot}$ und G_{gruen} unabhängig von der Position des unbekannten Strichs ist und bestimmen Sie bzgl. $\geqq$ die Beziehung der einzelnen Spiele zueinander.
Beachten Sie, dass in G_{leer} sämtliche Striche, die von dem nicht existenten Strich gestützt werden ebenfalls nicht existieren, da sie „fallen“.

Kapitel 5
Die kanonische Form

Im Kapitel über die Gruppe $\mathcal{G}$ haben wir die Elemente von $\mathcal{G}$ als Äquivalenzklassen von Kurzspielen definiert. Bei der Wahl eines Repräsentanten einer solchen Äquivalenzklasse bleiben uns unendlich viele Möglichkeiten. Grundsätzlich wäre es für die Analyse von Kurzspielen natürlich sinnvoll, einen möglich einfachen Repräsentanten zu wählen. Wir wollen nun herausfinden, ob es für jedes Element von $\mathcal{G}$ ein eindeutiges, möglichst einfaches Spiel gibt (d.h., die formale Notation soll möglichst kurz sein), dass Repräsentant der entsprechenden Äquivalenzklasse ist. Zur Erinnerung: Die formale Definition eines Kurzspiels beinhaltet die Menge aller Optionen für Blau und Rot. Wenn wir also versuchen, die formale Notation zu vereinfachen, bedeutet dies, dass wir die Anzahl der möglichen Optionen für Blau und Rot verringern wollen. Es stellt sich also die Frage, ob und wie wir Optionen eines Spiels G entfernen können, ohne die Äquivalenzklasse, die G repräsentiert, zu verlassen.

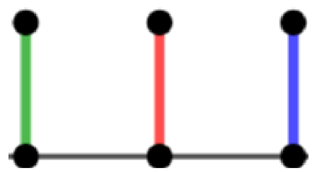
5.1 Unperfekte und konterbare Züge

Um festzustellen, welche Optionen unter der obigen Bedingung weggelassen werden können, ist die Definition der Äquivalenzrelation $\equiv$ ausschlaggebend. Diese prüft Kurzspiele auf Äquivalenz, indem sie deren Ausgänge (unter Verknüpfung mit beliebigen Kurzspielen) vergleicht. Der Ausgang eines Spiels wiederum hängt ausschließlich davon ab, wer in diesem Spiel bei perfekter Taktik einen Sieg erzwingen kann.
Züge, die auf keinen Fall Teil einer solchen Taktik sind, könnten wir aufgrund der obigen Überlegung aus der formalen Definition streichen, solange wir nur Aussagen bzgl. Spielen einer bestimmten Äquivalenzklasse treffen, denn diese Züge beeinflussen den Ausgang nicht. Doch wie lässt sich ein Zug bzw. eine Option identifizieren, die auf keinen Fall ein perfekter Zug sein kann? Dieser Zug sollte dann auf jeden Fall ungünstiger als ein anderer möglicher Zug sein, unabhängig davon, welche weiteren Komponenten Teil des Spiels sind. Eine Möglichkeit, Spiele (und damit auch Optionen) hinsichtlich dieser Bedingung miteinender zu vergleichen, liefert nun aber genau die Ordnung $\geqq$ auf $\mathcal{G}$ aus Kapitel 4.
Diese Vorüberlegung führt uns zu folgender formalen Definition:

Definition 5.1 Sei $G = \{G^B | G^R\}$ ein Kurzspiel.

a) Eine blaue Option G^{B_1} nennen wir **unperfekt** (für Blau), wenn eine andere Option G^{B_2} existiert mit $G^{B_2} \geqq G^{B_1}$.
b) Eine rote Option G^{R_1} nennen wir **unperfekt** (für Rot), wenn eine andere Option G^{R_2} existiert mit $G^{R_2} \leqq G^{R_1}$.

Diese Definition wollen wir mit einem Beispiel illustrieren. Dazu betrachten wir das Spiel $G =$ **Grün,Rot,Blau**.



$G =$ **Grün,Rot,Blau**

Sowohl Rot als auch Blau haben nur zwei gültige Zugoptionen. Wir können also auch schreiben: $G = \{$**Rot,Blau** , **Grün,Rot** | **Rot,Blau** , **Grün,Blau**$\}$

Wir betrachten im Folgenden die beiden Optionen für Blau. Sei $H =$ **Rot,Blau** und $I =$ **Grün,Rot**. Nun wollen wir Theorem 4.9 benutzen. Dazu müssen wir jetzt lediglich noch $o(H - I)$ oder wahlweise $o(I - H)$ bestimmen. Da H offensichtlich selbstinvers ist (wir erinnern uns hier an den Farbentausch in Hackenbush bzgl. Bildung von Inversen), bietet sich an dieser Stelle $o(I - H)$ eher an, denn es gilt $I - H = I + H =$ **Grün,Rot,Blau,Rot**.
Man erkennt, dass $o($**Grün,Rot,Blau,Rot**$) = R$ und somit folgt: $H \rhd I$, also insbesondere $H \geqq I$. Es gilt also, dass I ein unperfekter Zug für Blau ist, H allerdings nicht, da die einzige andere Option nicht besser oder gleichwertig ist.

Wir wollen im Anschluss formal zeigen, dass wir einen unperfekten Zug eines Kurzspiels G einfach weglassen können, ohne die entsprechende Äquivalenzklasse zu verlassen.

Lemma 5.2 *Sei G ein Kurzspiel. Angenommen wir erzeugen G' durch Entfernen einer unperfekten blauen Option G^{B_1}. Dann gilt $G \equiv G'$.*

Beweis Um die Aussage zu zeigen, müssen wir zwei Dinge beweisen: $G' \leqq G$ und $G' \geqq G$:

$\mathbf{G' \leqq G}$:
Es genügt zu zeigen, dass Rot als zweiter Spieler einen Sieg in $G' - G$ erzwingen kann. Dafür können wir eine Strategie angeben. Dazu führen wir uns zunächst noch einmal vor Augen, dass das Invertieren von Kurzspielen in diesen die Rollen von Blau und Rot vertauscht. Dies bedeutet, dass Rot in $-G$ so ziehen kann wie Blau in G und umgekehrt. Nun kann Rot als zweiter Spieler nach der Spiegelbildstrategie das Spiel $G' - G$ gewinnen. Zieht Blau zuerst in G', so kann Rot den entsprechenden analogen Zug in $-G$ durchführen, weil Rot in $-G$ so ziehen kann wie Blau in G und damit auch wie Blau in G'. Schließlich hat G'

keine Option für Blau, die G nicht hat. Zieht Blau hingegen zuerst in $-G$, so kann Rot auch hier einen analogen Zug in G' machen, weil Rot in G so ziehen kann, wie Blau in $-G$ und Rot zusätzlich in G und G' exakt dieselben Optionen hat. Sobald Blau und Rot ihren ersten Zug gemacht haben, sind wir in beiden Komponenten in für Blau und Rot gleichwertig zugänglichen Subkomponenten G^* und G^{**} und zusätzlich gilt $G^{**} = -G^*$. In diesen kann die Spiegelbildstrategie vom Rot erfolgreich angewendet werden, sodass Rot seinen Sieg erzwingen kann.
Für diese Richtung des Beweises ist es also überhaupt nicht relevant gewesen, dass der entfernte blaue Zug unperfekt war.

$\mathbf{G' \geqq G}$:
Es genügt zu zeigen, dass Blau als zweite Spielerin einen Sieg in $G' - G$ erzwingen kann. Wenn Rot beginnt, kann Rot entweder einen Zug machen, den Blau durch einen analogen Zug in der anderen Komponente beantworten kann (per Spiegelbildstrategie), oder Rot macht in $-G$ den Zug, zu dem es in G aufgrund des Entfernens der Option G^{B_1} keine analoge Antwort gibt. Dazu müsste Rot in $-G$ auf die Option $-G^{B_1}$ ziehen. Da G^{B_1} ein unperfekter blauer Zug in G war, gibt es eine blaue Option G^{B_2}, für die gilt $G^{B_2} \geqq G^{B_1}$. Sollte Rot also den Zug auf $G' - G^{B_1}$ wählen, so kann Blau einfach antworten, indem sie auf $G^{B_2} - G^{B_1}$ zieht. Damit gilt $G^{B_2} - G^{B_1} \geqq G^{B_1} - G^{B_1}$, wobei Blau Letzeres bereits durch Anwenden der Spiegelbildstrategie gewinnt, da sie dort als zweites spielt. Dann gewinnt Blau aber auch $G^{B_2} - G^{B_1}$ nach der Definition von $\geqq$ mit $X = -G^{B_1}$ und kann somit ihren Sieg in $G' - G$ als zweite Spielerin garantieren. □

Korollar 5.3 ***Austauschlemma***
Sei G ein Kurzspiel. Angenommen wir erzeugen G' durch Austauschen einer blauen Option G^{B_1} durch eine eine neue Option G^{B_2}. Dann gilt:

$$G \geqq G', \text{ falls } G^{B_1} \geqq G^{B_2} \text{ und } G \leqq G', \text{ falls } G^{B_1} \leqq G^{B_2}$$

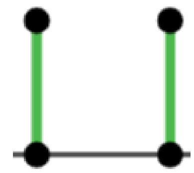
Aufgabe 18 Beweisen Sie das Austauschlemma. Orientieren Sie sich dafür am Beweis von Lemma 5.2.

Lemma 5.4 *Sei G ein Kurzspiel. Angenommen wir erzeugen G' durch Entfernen einer blauen Option G^{B_1}. Dann gilt $G \geqq G'$.*

Beweis Der Beweis ist Teil des Beweises von Lemma 5.2. □

Lemma 5.2 hat uns gezeigt, dass wir unperfekte Züge entfernen können, um ein (von der Notation her) kürzeres Spiel in derselben Äquivalenzklasse zu erhalten. Dadurch wirft sich die Frage auf, ob ein Spiel ohne unperfekte Züge bereits das kürzeste mögliche Spiel seiner Äquivalenzklasse ist.

Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, betrachten wir das Hackenbush-Spiel **Grün,Grün**:



Grün,Grün

In diesem Spiel haben sowohl Blau als auch Rot nur einen gültigen Zug, und zwar den auf das Spiel **Grün**. Wir können also schreiben: **Grün,Grün** = {**Grün**|**Grün**}
Da eine Option nur unperfekt sein kann, wenn der entsprechende Spielende mindestens eine weitere Option hat, gibt es in diesem Spiel keine unperfekten Züge. Aus Lemma 3.7 wissen wir jedoch zusätzlich, dass **Grün,Grün** $\equiv 0$. Nun ist das leere Spiel aber eindeutig kürzer als **Grün,Grün**. Wir haben unsere Suche nach dem kürzesten Repräsentanten einer Äquivalenzklasse also noch nicht abgeschlossen.
Das heißt, es muss eine weitere Möglichkeit geben, Kurzspiele innerhalb ihrer Äquivalenzklasse zu vereinfachen. Im obigen Beispiel haben wir die Situation, dass die erste Spielerin schon weiß, wie der zweite Spieler auf ihren Zug reagieren wird. Das leere Spiel erhalten wir nun, wenn wir ihre Option nun durch alle Optionen ersetzen, die ihr nach dieser bekannten Antwort des zweiten Spielers noch bleiben. Das Spiel **Grün,Grün** ist natürlich ein besonders einfaches Beispiel, da es überhaupt nur eine mögliche Antwort gibt. Sollte es jedoch mehrere Möglichkeiten geben, so sind für den Ausgang des Spiels und somit für die Äquivalenzklasse nur besonders geschickte Züge von Bedeutung. Dies kann man folgendermaßen formalisieren:

Definition 5.5 Sei $G = \{G^B|G^R\}$ ein Kurzspiel.

a) Eine blaue Option G^{B_1} nennen wir **konterbar** (durch $G^{B_1R_1}$), falls $G^{B_1R_1} \leqq G$
b) Eine rote Option G^{R_1} nennen wir **konterbar** (durch $G^{R_1B_1}$), falls $G^{R_1B_1} \geqq G$

Diese Definition sagt im Grunde genommen nur aus, dass ein Zug konterbar ist, wenn der Gegner auf eine Weise auf diesen Zug reagieren kann, sodass die Situation nach beiden Zügen nicht besser für die erste Spielerin ist als ursprünglich.

Im Anschluss wollen wir zeigen, dass ein Kurzspiel G seine Äquivalenzklasse nicht verlässt, wenn wir eine konterbare blaue (oder rote) Option durch alle blauen Optionen des Spiels nach dem Konter ersetzen. Auf diese Weise lässt sich G vereinfachen, da wir die Antwort von Rot (bzw. Blau) überspringen und direkt die Situation danach betrachten.

Lemma 5.6 *Sei* $G = \{G^B|G^R\} = \{G^{B_1}, G^{B'}|G^R\}$ *ein Kurzspiel. Sei* G^{B_1} *konterbar durch* $G^{B_1R_1} = \{G^{B_1R_1B}|G^{B_1R_1R}\}$. *Sei* $G' = \{G^{B'}, G^{B_1R_1B}|G^R\}$. *Dann ist* $G \equiv G'$.

Bei der obigen Notation ist zu beachten, dass G^{B_1} eine konkrete Option ist, $G^{B'}$ aber eine Menge von verschiedenen Optionen. Wenn wir $G^{B_1}, G^{B'}$ schreiben meinen wir damit die Vereinigung der Mengen $\{G^{B_1}\}$ und $G^{B'}$.

Beweis Analog zum vorherigen Beweis reicht es zu zeigen, dass $o(G' - G) = Z$. In G' kann Blau auf dieselben Optionen ziehen wie in G, abgesehen von G^{B_1}. Stattdessen kann sie auf alle Optionen aus $G^{B_1R_1B}$ ziehen. Rot hingegen hat dort exakt dieselben Optionen wie in G. Die Definition des Inversen tauscht nun die Rollen von Blau und Rot. In $-G$ kann jetzt also Blau genauso ziehen wie Rot in G bzw. G'. Rot hingegen kann so ziehen wie Blau in G, also bis auf den einen oben genannten Zug so wie Blau in G'. Nun gibt es drei Fälle:

Fall 1:
Blau beginnt und zieht in der Komponente G' auf eine Option $G^{B_1R_1B_k}$ aus $G^{B_1R_1B}$
Für den Beweis genügt es zu zeigen, dass Rot eine Gewinnstrategie als erster Spieler in $G^{B_1R_1B_k} - G$ hat. Aus Lemma 4.11 folgt, dass $G^{B_1R_1B_k} \blacktriangleleft G^{B_1R_1}$. Da G^{B_1} konterbar durch $G^{B_1R_1}$ ist, gilt zusätzlich, dass $G^{B_1R_1} \leqq G$. Ist $G^{B_1R_1} \equiv G$, so ist offensichtlich auch $G^{B_1R_1B_k} \blacktriangleleft G$. Ist hingegen $G^{B_1R_1} \lhd G$, so ist $G^{B_1R_1B_k} \lhd G$ und damit auch $G^{B_1R_1B_k} \blacktriangleleft G$. Aus Theorem 4.9 folgt dann, dass $o(G^{B_1R_1B_k} - G) \in \{E, R\}$. Dann kann Rot als erster Spieler auf jeden Fall einen Sieg erzwingen.

Fall 2:
Rot beginnt und zieht in der Komponente $-G$ auf $-G^{B_1}$
Es genügt nun zu zeigen, dass Blau als erste Spielerin eine Gewinnstrategie in $G' - G^{B_1}$ besitzt. Sicherlich ist $G' - G^{B_1R_1}$ jetzt eine blaue Option, da Blau in $-G^{B_1}$ so ziehen kann wie Rot in G^{B_1}. Wir wollen jetzt noch zeigen, dass Blau als zweite Spielerin einen Sieg in $G' - G^{B_1R_1}$ erzwingen kann.
Rot kann als erster Spieler in G' auf eine Option G^{R_k} aus G^R ziehen. Analog zu Fall 1 gilt, dass $G^{R_k} \blacktriangleright G$, sowie $G \geqq G^{B_1R_1}$. Wie in Fall 1 gilt dann $G^{R_k} \blacktriangleright G^{B_1R_1}$. Aus Theorem **??** folgt, dass $o(G^{R_k} - G^{B_1R_1}) \in \{B, E\}$. Somit kann Blau als erste Spielerin ihren Sieg in $G^{R_k} - G^{B_1R_1}$ erzwingen und gewinnt als zweite Spielerin $G' - G^{B_1R_1}$.
Stattdessen kann Rot als ersten Zug in der Komponente $-G^{B_1R_1}$ auf eine Option $-G^{B_1R_1B_k} \in -G^{B_1R_1B}$ ziehen. Nach Konstruktion von G' kann Blau diesen durch Anwenden der Spiegelbildstrategie kopieren und somit ihren Sieg erzwingen.

Fall 3:
Der erste Zug passt weder zu Fall 1 noch zu Fall 2.
Der zweite Spieler kann den ersten Zug durch Anwenden der Spiegelbildstrategie kopieren und gewinnt auf diese Weise das Spiel. □

5.2 Die kanonische Form

Wir haben nun also gesehen, dass wir ein Kurzspiel G unter bestimmten Voraussetzungen vereinfachen können, ohne dabei die Äquivalenzklasse von G zu verlassen. Die Untersuchung auf unperfekte und konterbare Züge erlaubt es uns also, einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse mit kürzerer Notation zu finden. Da wir uns auf der Suche nach einer möglichst kurzen Notation befinden, wollen wir diese Vereinfachungen so oft wie möglich durchführen.

Dies wirft automatisch die Frage auf, ob jede Äquivalenzklasse ein Spiel enthält, welches auf diese Weise nicht weiter vereinfacht werden kann, und wenn ja, ob dieses eindeutig ist. Dazu definieren wir nun:

Definition 5.7 Ein Kurzspiel K ist in **kanonischer Form**, falls alle Subpositionen von K keine unperfekten oder konterbaren Züge beinhalten.

Um die Eigenschaften der kanonischen Form genauer untersuchen zu können, benötigen wir ein kleines Hilfslemma:

Lemma 5.8 *Seien G und H Kurzspiele, die weder unperfekte noch konterbare Züge enthalten, und sei zusätzlich $G \equiv H$. Dann gibt es für jede Option G^{B_i} eine Option H^{B_j}, sodass $G^{B_i} \equiv H^{B_j}$ und umgekehrt.*
Die Aussage gilt analog für rote Optionen.

Beweis Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine feste blaue Option G^{B_i} aus G. Da G und H äquivalent sind, gilt $G - H \equiv 0$. Aus Lemma 4.11 folgt, dass $G^{B_i} \blacktriangleleft G$, und somit auch $G^{B_i} - H \blacktriangleleft 0$. Also gilt $o(G^{B_i} - H) \in \{E, R\}$. Rot hat also eine Gewinnstrategie als erster Spieler. Rot kann nun entweder in der Komponente G^{B_i} auf eine Option $G^{B_i R_j}$ ziehen, oder in der Komponente $-H$ auf eine Option $-H^{B_k}$.
Jetzt muss also $G^{B_i R_j} - H \leqq 0$ oder $G^{B_i} - H^{B_k} \leqq 0$ für eine Option H^{B_k} sein.
Ersteres würde jedoch implizieren, dass $G^{B_i R_j} \leqq H \equiv G$, was bedeuten würde, dass G^{B_i} durch $G^{B_i R_j}$ konterbar ist. Dies ist nach Annahme unmöglich.
Also muss $G^{B_i} - H^{B_k} \leqq 0$ für eine Option H^{B_k} gelten. Wir können jedoch analog die feste blaue Option H^{B_k} in $H - G$ fixieren. Mit identischen Überlegungen finden wir dann eine Option G^{B_l}, für die $H^{B_k} \leqq G^{B_l}$ gilt. Somit gilt $G^{B_i} \leqq H^{B_k} \leqq G^{B_l}$. Wäre jetzt $G^{B_i} \not\equiv H^{B_k}$, so wäre G^{B_i} unperfekt, was nach Annahme unmöglich ist. Somit ist die Aussage gezeigt. □

Theorem 5.9 *Für jedes Kurzspiel G mit der dazugehörigen Äquivalenzklasse $[G]$ existiert ein eindeutiger Repräsentant K in kanonischer Form. Die formale Notation von K ist dann minimal.*

Beweis Wir haben nun drei Aussagen zu zeigen:

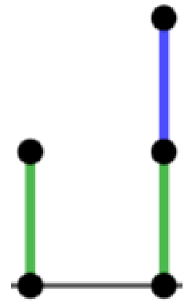
Existenz der kanonischen Form:
Wir zeigen die Existenz per Induktion. Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Aussage für alle Optionen von G samt deren Subpositionen. Mit Hilfe des Austauschlemmas können wir all diese Optionen durch eine entsprechende kanonische Form ersetzen, ohne die Äquivalenzklasse $[G]$ zu verlassen. Das Spiel, welches wir dadurch erhalten, nennen wir G'. Nun sind zwar alle Optionen von G' bereits weder unperfekt noch konterbar, allerdings könnten

diese Optionen bezogen auf das Spiel G' konterbar oder unperfekt sein. Dazu betrachten wir zwei Fälle. Wenn G' jetzt bereits weder unperfekte noch konterbare Optionen hat, dann ist G' per Definition bereits in kanonischer Form. Besitzt G' unperfekte Optionen, so können wir diese nach Lemma 5.2 entfernen, dabei bleiben wir in $[G]$. Besitzt G' konterbare Optionen, so können diese nach Lemma 5.6 durch passende Subpositionen ersetzt werden, diese sind Subpositionen der Optionen von G und deshalb nach Induktionsvoraussetzung nicht mehr konterbar bzw. unperfekt. Das auf diese Weise entstehende Spiel K ist in der kanonischen Form und in $[G]$.

Eindeutigkeit der kanonischen Form:
Zwei Kurzspiele G und H sind bezüglich ihrer rekursiven Notation identisch, wenn jeder Spielverlauf, der sich in G ergeben kann, auch in H möglich ist und umgekehrt, ergo, wenn für jede Subposition von G eine Subposition in H existiert, die exakt dieselben Optionen zur Verfügung stellt.
Angenommen, K und K' sind zwei Kurzspiele in kanonischer Form aus $[G]$. Wir zeigen die Aussage induktiv. Da K und K' in kanonischer Form stehen, sind auch alle Optionen von K und K' bereits in kanonischer Form. Nach Induktionsvoraussetzung ist die kanonische Form der Optionen eindeutig. Ab hier reicht es also zu zeigen, dass zu jeder Option von K eine äquivalente Option in K' existiert. Dadurch wissen wir dann, dass diese äquivalenten Optionen sogar identisch sind, denn die Optionen stehen ja in kanonischer Form und diese ist innerhalb einer Äquivalenzklasse nach Induktionsvoraussetzung eindeutig. Da $K \equiv K'$ und K und K' beide in kanonischer Form sind, folgt mit Lemma 5.8, dass für jede blaue (und analog jede rote) Option in K eine äquivalente Option in K' existiert. Somit ist die Eindeutigkeit gezeigt.

Minimalität der Notation:
Sei K die eindeutige kanonische Form von $[G]$. Angenommen, es existiert ein Kurzspiel K' aus $[G]$ mit noch kürzerer Notation. Das Spiel K' kann sich nicht in kanonischer Form befinden, da diese eindeutig ist und K' ja kürzer als K sein soll. K' ist also nicht in kanonischer Form, kann demnach aber durch Anpassungen wie im Beweis der Existenz in kanonische Form überführt werden. Trivialerweise verkürzen das Weglassen unperfekter Optionen sowie das Ersetzen von konterbaren Optionen durch entsprechende Subpositionen die Notation. Es verbleibt zu zeigen, dass das Ersetzen einzelner Optionen von K' durch deren kanonische Form mit dem Austauschlemma die Notation von K' verkürzt. Dies lässt sich leicht induktiv zeigen, denn die kanonische Form der Optionen von K' hat dann nach Induktionsvoraussetzung minimale Notation, wodurch sich durch Anwenden des Austauschlemmas auch die Notation von K' verkürzt. Da $K' \equiv K$ erhalten wir durch diese Verkürzungen die eindeutige kanonische Form K. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass die Notation von K' kürzer sei als die von K. $\square$

Wir haben nun die kanonische Form kennen gelernt und jetzt wollen wir sie natürlich an einem Beispiel anwenden. Dazu betrachten wir zunächst das Kurzspiel $G =$ **Grün,GrünBlau**.



G = **Grün,GrünBlau**

Der Einfachheit halber notieren wir zunächst alle Optionen von G in einer lesbaren Schreibweise.

$$G = \{\textbf{Grün}\ ,\ \textbf{GrünBlau}\ ,\ \textbf{Grün,Grün}\ |\ \textbf{Grün}\ ,\ \textbf{GrünBlau}\}$$

Wir wissen bereits, dass **Grün,Grün** $\equiv 0$. Somit ist 0 die kanonische Form von **Grün,Grün**. Wir zeigen nun, dass die beiden anderen blauen Optionen konterbar sind. Offensichtlich kann Rot von **Grün** sowie von **GrünBlau** direkt auf das leere Spiel ziehen und somit gewinnen. Formal betrachtet müssen wir zeigen, dass die Definition von konterbar erfüllt ist. Das heißt, es gilt zu zeigen, dass die Position, die sich durch den Konter ergibt, kleiner oder äquivalent ist als das ursprüngliche Spiel. Also gilt es, $0 \leqq G$ zu zeigen. Offensichtlich ist $o(G) = B$. Somit ist sowohl **Grün** als auch **GrünBlau** mit dem gleichen Argument konterbar und kann durch die passende Ersetzung, dem leeren Spiel, ausgetauscht werden. Somit lassen sich alle blauen Optionen von G durch die Optionen des leeren Spiels ersetzen.
Betrachten wir nun die roten Optionen. Diese sind beide nicht konterbar, da einerseits Blau als Antwort auf das leere Spiel ziehen könnte, aber $0 \ngeqq G$ und somit wäre die Definition für eine rote konterbare Option nicht erfüllt. Es wäre andererseits möglich (aber unklug), dass Blau von **GrünBlau** auf **Grün** zieht. Da aber **Grün, GrünBlau** $\geqq$ **Grün**, ist die Option **GrünBlau** auch durch diese Reaktion nicht konterbar.
Wir können aber zeigen, dass die rote Option **GrünBlau** unperfekt ist. Zu zeigen ist, dass **Grün** $\leqq$ **GrünBlau**, oder äquivalent dazu $0 \leqq$ **GrünBlau** − **Grün**. Da das Spiel **Grün** selbstinvers ist, genügt es $0 \leqq$ **GrünBlau** + **Grün** $= G$ zu betrachten. Dies haben wir bereits oben genutzt. Somit ist **GrünBlau** unperfekt und lässt sich aus der formalen Notation entfernen. Die übrigen Optionen können nun offensichtlich nicht weiter vereinfacht werden. Wir können nun die kanonische Form K_G unseres Spiels G angeben:

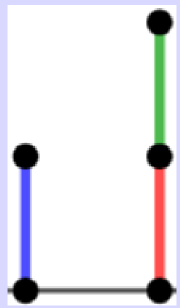
$$K_G = \{0 \big| \textbf{Grün}\} = \{\{|\}\big|\{\{|\}|\{|\}\}\}$$

Dem aufmerksamen Leser wird bereits aufgefallen sein, dass sich K_G nicht mehr exakt in Hackenbush darstellen lässt. Dort existiert kein Spiel, in welchem die einzige blaue Option ein Zug auf das leere Spiel und die einzige rote Option ein Zug auf das Spiel **Grün** ist.

Aufgabe 19 Zeigen Sie, dass das Spiel K_G nicht in Hackenbush existiert.

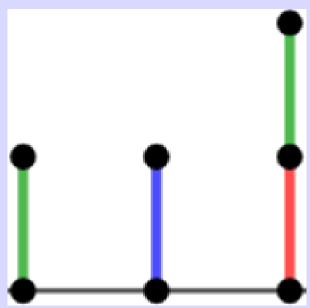
Aufgabe 20 Bestimmen Sie die kanonische Form folgender Hackenbush-Spiele. Falls diese kanonische Form eine Darstellung in Hackenbush besitzt, geben Sie diese zusätzlich an:

a)



G = **Blau,RotGrün**

b)



H = **Grün,Blau,RotGrün**

Kapitel 6
Spielwerte und Zahlen

Mit der in Kapitel 4 eingeführten partiellen Ordnung auf $\mathcal{G}$ ist es uns nun möglich, bestimmte Spiele der „Größe nach“ zu ordnen. Dies wollen wir in diesem Kapitel benutzen, um den Äquivalenzklassen aus $\mathcal{G}$ konkrete Spielwerte zuzuordnen. Damit ist gemeint, dass diese Äquivalenzklasse einen neuen Namen bekommt, diesen bezeichnen wir als Spielwert. Zu einem konkreten Repräsentanten G einer Äquivalenzklasse x, wobei x ein Spielwert ist, schreiben wir dann auch „G hat den Spielwert x“.
Das Ziel ist es dabei, mit diesen Werten rechnen zu können. Im Idealfall bekommen wir Analogien zu den uns wohl bekannten reellen Zahlen, die es uns erlauben, deren Rechenregeln zur Analyse von Kurzspielen hinzuzuziehen. An dieser Stelle lässt sich bereits feststellen, dass wir nicht einfach jeder Äquivalenzklasse eine bestimmte reelle Zahl sinnvoll zuordnen können, denn die partielle Ordnung $\geqq$ auf $\mathcal{G}$ ist nicht linear. Wir wollen im Folgenden den Spielen der Äquivalenzklassen die Zahlen so zuordnen, dass ein Spiel G, welches gemäß $\geqq$ größer als ein Spiel H ist, auch den größeren Spielwert erhält. Weiterhin soll die disjunkte Summe zweier Kurzspiele G und H auch die Summe der Spielwerte von G und H als Spielwert erhalten.

6.1 Welche Spiele sind ganzzahlig? Und was heißt das überhaupt?

Zuerst ordnen wir dem leeren Spiel (und damit auch dessen gesamter Äquivalenzklasse) den Spielwert 0 zu. Der Spielwert 0 ist somit ein neuer Name für die Äquivalenzklasse in $\mathcal{G}$, welche das leere Spiel enthält. Ab diesem Kapitel verwenden wir die 0 also nicht mehr ausschließlich als das leere Spiel, sondern als dessen gesamte Äquivalenzklasse. Wir werden allerdings auch weiterhin manchmal tatsächlich das leere Spiel mit 0 bezeichnen. Im Kontext ergibt sich dann grundsätzlich, ob das leere Spiel oder die Äquivalenzklasse des leeren Spiels gemeint ist.
Als Nächstes suchen wir eine Äquivalenzklasse, welcher wir die 1 zuordnen können. Dies tun wir anhand eines Repräsentanten G. Da $1 > 0$ brauchen wir ein Spiel G, sodass $G \rhd 0$. Sinnvollerweise nutzen wir dafür jenes Spiel G, in dem Blau genau eine Zugmöglichkeit hat, während Rot keinen gültigen Zug besitzt. Dieses Spiel sieht folgendermaßen aus:

$$G = \{\{|\}\big|\} = \{0\big|\} \text{ Wir setzen dann } [G] := 1$$

Alle Spieler der Äquivalenzklasse von G werden also durch die 1 repräsentiert.

Vorsicht! Wir haben oben den Spielwert 0 als Option von G notiert. Der Spielwert ist aber natürlich eine Äquivalenzklasse von Spielen und somit keine tatsächliche Option. Wir wollen aber trotzdem, um einer leicht verdaulichen Notation willen, konkrete Optionen durch deren Spielwerte ersetzen. Dies ist nur eine verkürzte Schreibweise, die tatsächliche Option ist nicht der Spielwert sondern immer noch ein konkreter Repräsentant! Im Folgenden werden wir in der Notation konkrete Spiele häufig durch ihren Spielwert ersetzen, um sehr komplizierte Schreibweisen zu vermeiden. Wenn also ein Spielwert als Option eines Spiels auftaucht oder auf ein konkretes Spiel addiert wird, ist mit diesem Spielwert ein konkreter Repräsentant (in der Regel die kanonische Form) dieses Werts gemeint.

Unter Verwendung der Gruppenstruktur von $\mathcal{G}$ muss nun für das inverse Element $1+(-1) = 0$ gelten. Somit folgt für die Darstellung der -1:

$$-1 := [\{\big|\, 0\}]$$

Weiterhin können wir die Verknüpfung + von $\mathcal{G}$ nutzen um die Zahl 2 als $2 = 1 + 1$ zu definieren:

$$2 := [\{1\big|\}]$$

Somit können wir nun die natürlichen sowie die ganzen Zahlen formal über Äquivalenzklassen von Kurzspielen definieren.

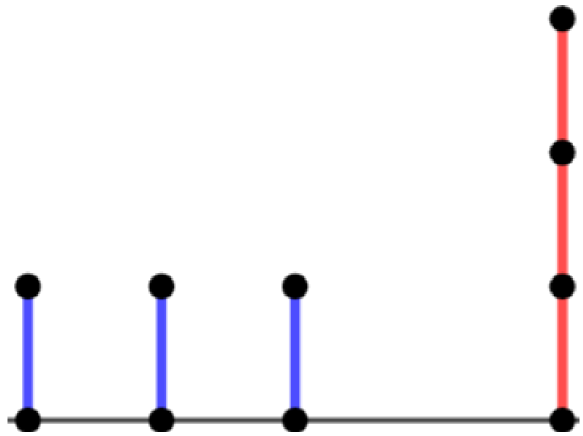
Definition 6.1

1. $0 = [\{|\}]$
2. $n + 1 = [\{n|\}]$
3. $-n = [\{|n - 1\}]$

Die natürlichen Zahlen werden bei dieser Definition ähnlich wie in der von Neumann-Hierarchie für natürliche Zahlen konstruiert. Anstelle von Mengen werden hier jedoch geordnete Paare benutzt, deren zweiter Eintrag leer ist.

In Hackenbush können wir ein konkretes Spiel mit Spielwert n durch das Spiel mit n einzelnen, mit der Grundlinie verbundenen, blauen Strichen finden. Da wir uns in der Definition von Kurzspielen nur in endlichen Fällen bewegen, können wir zudem feststellen, dass n blaue Striche nebeneinander äquivalent sind zu einem Spiel mit nur einem Stapel aus genau n Strichen, die alle blau sind. Dies kann man sich sehr leicht klar machen, da es genügt zu zeigen, dass das Spiel, das aus n einzelnen blauen Stapeln und einem Stapel mit genau n Strichen, die alle rot sind, äquivalent zum Nullspiel ist. Wir müssen dafür nur zeigen, dass der zweite Spieler in besagtem Spiel einen Sieg erzwingen kann.
Sollte Blau beginnen, so kann Blau in jedem ihrer Züge nur genau einen einzelnen blauen Stapel entfernen, Rot kann dies kontern, indem er vom roten Stapel immer den obersten noch

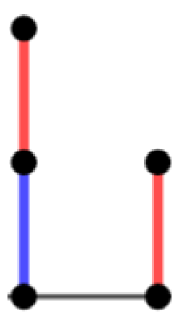
vorhandenen Strich entfernt, und somit seinen Sieg erzwingen.
Beginnt Rot, dann kann er entweder den obersten Strich entfernen oder einen der darunterliegenden. In beiden Fällen hat Blau immer noch genau n Züge zur Verfügung, während die Anzahl der möglichen Züge von Rot geringer ist. Somit gewinnt Blau als zweite Spielerin.



Veranschaulichung der Äquivalenz

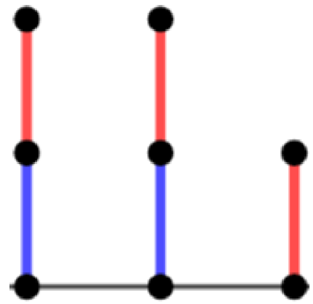
6.2 Spiele als Brüche?!

Bisher haben wir ausschließlich einfarbige Stapel bezüglich ihrer Spielwerte untersucht. Doch was ist mit Spielen wie G = **BlauRot**? Um einen sinnvollen Wert bestimmen zu können, betrachten wir, wie G sich im Verhältnis zu Repräsentanten bereits bekannter Spielwerte verhält. Sicherlich ist G = **BlauRot** ein Spiel, in dem Blau einen Sieg erzwingen kann, also gilt $G \rhd 0$. Dementsprechend sollten wir für den Spielwert eine reelle Zahl x wählen, für die $x > 0$ gilt (sofern das unter Berücksichtigung der Einhaltung sämtlicher Strukturen möglich ist). Wenn wir nun aber den einfachsten Repräsentanten aus $[G] + (-1)$ in Hackenbush betrachten, also **BlauRot,Rot**, stellen wir fest, dass dort Rot seinen Sieg erzwingen kann. Also gilt $[G] + (-1) \lhd 0$ und somit ebenfalls $[G] \lhd 1$. Um der Konstruktion der Spielwerte treu zu bleiben, müssen wir der Äquivalenzklasse von G also einen passenden Wert im Bereich zwischen 0 und 1 zuweisen.



Das Spiel **BlauRot,Rot**

Doch wie finden wir diesen Wert? Ein Spiel G, welches im obigen Sinne sinnvoll einen Bruch $\frac{p}{q}$ als Spielwert hat, muss die Eigenschaft erfüllen, dass es äquivalent zu einem Spiel aus p ist, wenn wir es q mal disjunkt addieren. Betrachten wir unser Beispiel G = **BlauRot**. Jetzt stellt sich die Frage wie oft wir das Spiel G disjunkt addieren müssen, um es durch disjunkte Addition der kanonischen Form von $-p$ äquivalent zum leeren Spiel werden zu lassen.

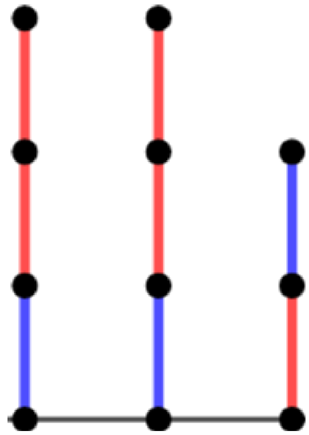


$G + G + (-1)$

Anhand von obiger Abbildung lässt sich leicht erkennen, dass $G + G + (-1)$ ein Spiel ist, in dem der zweite Spieler seinen Sieg garantieren kann. Beginnt Blau, so kann Blau nur auf das Spiel $G + (-1)$ ziehen, welches Rot immer gewinnt (s.o.). Rot kann als Startspieler nicht den einzelnen roten Strich entfernen, da Blau dann die einzigen Züge mit Grundlinienverbindung hat und somit gewinnt. Rot kann aber ebenfalls nicht einen der roten Striche auf den blauen Strichen entfernen, da sonst Blau den noch verbliebenen Stapel **BlauRot** entfernt und auf das Spiel **Blau,Rot**= $\{-1|1\}$ zieht, das von der zweiten Spielerin (also Blau) gewonnen wird.
Da somit $G + G + (-1) \equiv 0$, stellen wir fest, dass das Spiel (-1) durch zwei Spiele vom Typ G ausgeglichen wird. Also muss also für den Spielwert von G gelten:

$$[G] = [\{0|1\}] = \frac{1}{2}$$

Diese Erkenntnis können wir nun erweitern, um Brüche mit beliebigen Zweierpotenzen im Nenner als Hackenbush-Spiel darzustellen. Dazu gehen wir analog vor und versuchen, das Spiel H zu finden, indem wir auf das Spiel $-G$ mit Spielwert $-\frac{1}{2^{n-1}}$ zwei mal H disjunkt addieren. Es muss dann gelten: $2H + (-G) \equiv 0$ und somit $[H] = \frac{1}{2^n}$.
Um zu erkennen wie eine solche Konstruktion in Hackenbush funktionieren könnte, betrachten wir als Beispiel nun das bereits bekannte Spiel G mit Spielwert $\frac{1}{2}$. Wir suchen nun also ein Spiel H, das wir zwei mal zu $-G$ addieren können, so, dass $H + H + (-G) \equiv 0$ gilt. Dazu betrachten wir die nächste Abbildung. Wir können mit ein wenig Aufwand zeigen, dass in diesem Spiel der zweite Spieler seinen Sieg erzwingen kann. Somit gilt für H in kanonischer Form $H \equiv \{0|\frac{1}{2}\} \in \frac{1}{4}$. An dieser Stelle muss man ein wenig aufpassen, da unser Beispiel in Hackenbush nicht in kanonischer Form ist, dementsprechend ist das Spiel H nur äquivalent zu besagtem Hackenbush-Spiel, aber nicht gleich.



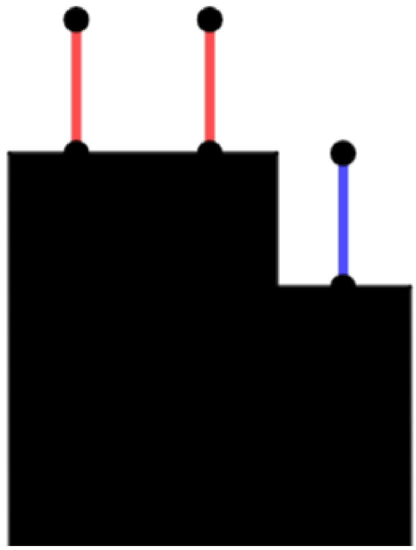
$H + H + (-G)$

Aufgabe 21 Zeigen Sie, dass im obigen Spiel der zweite Spieler seinen Sieg erzwingen kann.

Die beiden vorangegangen Überlegungen bzgl. der Spielwerte von $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{4}$ legen die Vermutung nahe, dass in Hackenbush ein Spiel, das einen Spielwert von $\frac{1}{2^n}$ besitzt, durch einen Stapel mit $n + 1$ Strichen dargestellt werden kann, wobei der unterste Strich blau und alle darüber liegenden rot sind. Diese Vermutung werden wir nun überprüfen und formal beweisen. Den Beweis führen wir in Hackenbush. Mit den gefundenen Repräsentanten der Äquivalenzklassen folgt aus dem Beweis in Hackenbush die allgemeine Aussage auf ganz $\mathcal{G}$.

Lemma 6.2 *Es gilt* $\frac{1}{2^n} = [\{0|\frac{1}{2^{n-1}}\}] \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

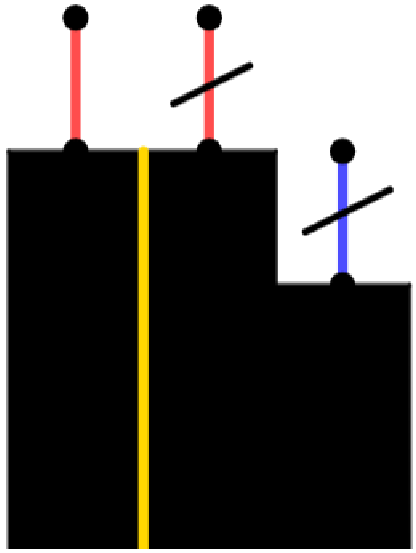
Beweis Wir beweisen die Aussage per Induktion. Den Induktionsanfang haben wir bereits im Beispiel der Darstellung von $\frac{1}{2}$ getätigt. Es geht nun nur noch um den Induktionsschritt. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung in Hackenbush. Dabei steht der schwarze Kasten für die Darstellung der Induktionsvoraussetzung $\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} + (-\frac{1}{2^{n-2}}) = 0$.



Induktionsschritt

Wir müssen nun zeigen, dass in der Abbildung der zweite Spieler seinen Sieg erzwingen kann. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

Blau beginnt: Blau hat als erste Spielerin zwei Optionen. Sie kann entweder einen der Striche im schwarzen Kasten (links bzw. Mitte), die mit der Grundlinie verbunden sind, entfernen. Oder sie zieht im rechten Stapel (mit insgesamt $n - 1$ blauen Strichen).
Entfernt Blau einen der blauen Striche, die mit der Grundlinie verbunden sind, so kann Rot im anderen Stapel, das zuvor diese Form hatte, den obersten roten Strich entfernen und gewinnt dann in den verbleibenden zwei Stapeln nach der Spiegelbildstrategie.
Sollte Blau als Startspielerin im rechten Stapel beginnen, so ist der sinnvollste Zug, den obersten blauen Strich zu entfernen, da wir nach Induktionsvoraussetzung wissen, dass der höchstwertige Spielwert, der sich in diesem Stapel durch Entfernen eines blauen Strichs ergibt, genau $-\frac{1}{2^{n-2}}$ ist.
Wir betrachten nun die folgende Abbildung:



Zug von Blau mit entsprechender Antwort von Rot

Blau hat zunächst besagten oberen blauen Strich als Startspielerin entfernt. Rot beantwortet dies, indem er den obersten roten Strich in der Mitte entfernt. Nun wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, dass die beiden schwarzen Teilkästen (in der Abbildung durch die gelbe Linie getrennt) zueinander invers sind. Nun ist Blau im verbleibenden Spiel Startspielerin und Rot kann durch Anwenden der Spiegelbildstrategie (der oberste rote Strich auf dem linken Stapel kann dabei vernachlässigt werden) seinen Sieg als zweiter Spieler erzwingen.

Rot beginnt: Sicherlich sollte Rot als Startspieler nicht den einzigen roten Strich im rechten Stapel (der mit der Grundlinie verbunden ist) entfernen, da ansonsten Blau die einzigen Verbindungen mit der Grundlinie hat und somit sicher gewinnen kann.
Sollte Rot also in einem der beiden anderen Stapel (links oder Mitte) ziehen, so gilt mit dem gleichen Argument wie im Fall von Blau, dass Rot sinnvollerweise den obersten roten Strich entfernt. Dies kann Blau nun kontern, indem sie vom verbleibenden Stapel, der zu Beginn die gleiche Form hatte, die Verbindung zur Grundlinie (und damit den kompletten Stapel) entfernt. Danach kann Blau mit der Spiegelbildstrategie ihren Sieg erzwingen. □

Aufgabe 22 Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und m ungerade.
Zeigen Sie: $\frac{m}{2^n} := m \cdot \frac{1}{2^n} = [\{\frac{m-1}{2^n} | \frac{m+1}{2^n}\}]$

Mit Aufgabe 22 wissen wir nun natürlich, wie ein Spiel der Form $\frac{m}{2^n}$ in einer formalen Darstellung aussieht. Das sagt uns allerdings noch nichts darüber aus, welche Darstellung so ein Spiel in Hackenbush besitzt.
Wir wollen nun beispielhaft das Spiel $\frac{7}{16}$ in Hackenbush konstruieren. Dies ist sehr einfach, da $\frac{7}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$. Wir benötigen also nur 3 Komponenten um das Spiel $\frac{7}{16}$ sinnvoll zu konstruieren. Allerdings stellt sich nun natürlich die Frage, ob es auch möglich ist ein solches

Spiel mit in einer einzigen unverzweigten Komponente zu erzeugen. Wir wollen nun kurz zeigen, dass dies tatsächlich möglich ist und dann ein Vorgehen vorstellen, wie wir dies für eine beliebiges Spiel der Form $\frac{m}{2^n}$ erreichen.

Lemma 6.3 *Wenn G ein Repräsentant von $\frac{m}{2^n}$ in Blau-Rotem Hackenbush, bestehend aus einer nicht verzweigten Komponente ist (zu diesem Zeitpunkt ist noch überhaupt nicht klar, ob eine solche Darstellung immer existiert), dann ist das Spiel G_{blau}, welches wir durch das Hinzufügen eines einzigen, blauen Striches an der Spitze von G erhalten, ein Repräsentant von $\frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$ (Dies gilt analog für einen roten Strich und $\frac{m}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$).*

Beweis Zuerst betrachten wir die Optionen von G_{blau}. Aus Aufgabe 22 folgt, dass die kanonische Form von G folgendermaßen aussieht:

$$G \equiv \{\tfrac{m-1}{2^n} | \tfrac{m+1}{2^n}\}$$

Durch das Hinzufügen eines blauen Strichs ändern sich die roten Optionen nicht. Bei den blauen Optionen kommt nur eine weitere hinzu, und zwar die, die durch das Entfernen des besagten Striches auf G zieht. Da G den Spielwert $\frac{m}{2^n}$ hat und die (einzige) blaue Option der kanonischen Form von G den Spielwert $\frac{m-1}{2^n}$ hat, erhalten wir wegen

$$\tfrac{m}{2^n} = \tfrac{m-1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n} \rhd \tfrac{m-1}{2^n}$$

folgende kanonische Form von G_{blau}:

$$G_{blau} \equiv \{\tfrac{m}{2^n} | \tfrac{m+1}{2^n}\}$$

Nun betrachten wir $\frac{m}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Da wir nach Konstruktion mit diesen Spielwerten wie mit reellen Zahlen rechnen können, gilt:

$$\tfrac{m}{2^n} + \tfrac{1}{2^{n+1}} = \tfrac{2m+1}{2^{n+1}}$$

Nach Aufgabe 22 gilt zusätzlich: $\frac{2m+1}{2^{n+1}} = \{\frac{2m}{2^{n+1}} | \frac{2m+2}{2^{n+1}}\} = \{\frac{m}{2^n} | \frac{m+1}{2^n}\} \equiv G_{blau}$ □

Korollar 6.4 *Jedes Spiel der Form $\frac{m}{2^n}$, mit $n, m \in \mathbb{N}$ und m ungerade lässt sich als Hackenbush-Spiel aus einem unverzweigten Stapel darstellen.*

Lemma 6.3 liefert uns auch direkt ein Verfahren, um den positiven Zahlenstrahl für mit entsprechenden Hackenbush-Spielen (das heißt unverzweigt und aus einer Komponente bestehend) der Form $\frac{m}{2^n}$ aufzufüllen. Zunächst können wir die natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl sehr leicht konstruieren. Wir zeigen nun, wie wir das Intervall $(a, b) = (n, n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$ sukzessive befüllen. Zunächst erhalten wir eine Darstellung von $\frac{a+b}{2}$ durch hinzufügen eines roten Striches an der Spitze der Darstellung von b.

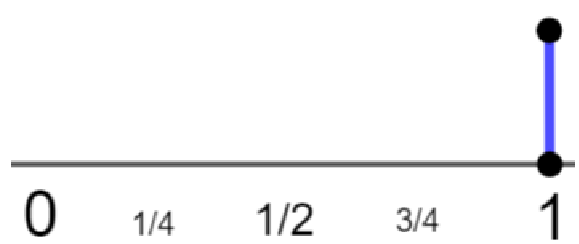
Schritt A:
Wir fügen zur Darstellung von $\frac{a+b}{2}$ einen roten Strich hinzu und erzeugen somit eine Darstellung von $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}$ und verfahren dann auf dem Intervall $(a_{neu}, b_{neu}) = (a, \frac{a+b}{2})$ gemäß der Schritte A und B.

Schritt B:
Wir fügen wir zur Darstellung von $\frac{a+b}{2}$ einen blauen Strich hinzu und erzeugen somit eine Darstellung von $\frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}$ und verfahren dann auf dem Intervall $(a_{neu}, b_{neu}) = (\frac{a+b}{2}, b)$ gemäß der Schritte A und B.

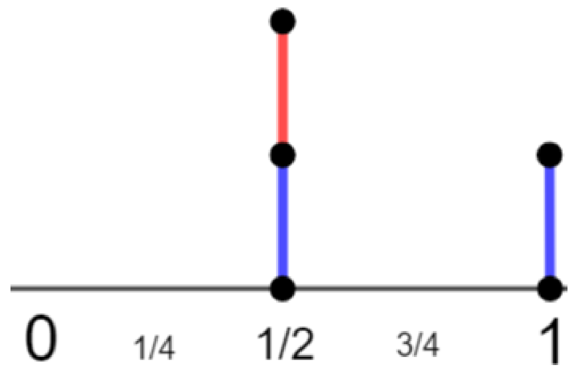
Offensichtlich können wir somit den ganzen positiven Zahlenstrahl mit entsprechenden Hackenbush-Spielen befüllen. Die inversen Spiele im negativen Bereich entstehen dann durch Farbtenausch.

Wir wollen uns dieses Verfahren nun noch kurz am Beispiel $\frac{7}{16}$ klar machen. Dafür betrachten wir allerdings nur die entsprechenden Abzweigungen. Wir betrachten zunächst das Intervall $(0, 1)$. Wir erzeugen nun die Darstellungen von $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, indem wir der Darstellung von $\frac{1}{2}$ = **BlauRot** einen roten ($\frac{1}{4}$ = **BlauRotRot**) bzw. einen blauen Strich ($\frac{3}{4}$ = **BlauRotBlau**) hinzufügen.
Wir wissen nun, dass $\frac{7}{16}$ im Intervall $(0, \frac{1}{2})$ liegt. Also arbeiten wir nun in diesem. Wir erzeugen nun die Darstellungen von $\frac{1}{8}$ = **BlauRotRotRot**, indem wir auf die Darstellung von $\frac{1}{4}$ einen roten Strich hinzufügen und $\frac{3}{8}$ = **BlauRotRotBlau**, indem wir auf die Darstellung von $\frac{1}{4}$ einen blauen Strich hinzufügen.
Wir wissen nun, dass $\frac{7}{16}$ im Intervall $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ liegt. Also arbeiten wir nun in diesem. Wir erzeugen nun die Darstellungen von von $\frac{5}{16}$ = **BlauRotRotBlauRot** und $\frac{7}{16}$ = **BlauRotRotBlauBlau** auf die gleiche Art und Weise und sind nun fertig.

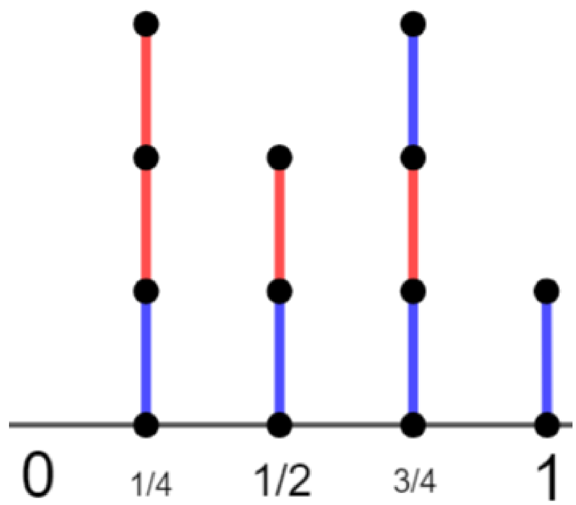
Dieses Verfahren wollen wir jetzt noch einmal etwas informeller aber dafür anschaulicher (also weniger hässlich) darstellen. Dafür betrachten wir den Zahlenstrahl. Diesen wollen wir jetzt schrittweise rekursiv „füllen“, das heißt, wir setzen die entsprechenden Spiele auf ihren zugehörigen Spielwert. Diesen Vorgang wollen wir zusätzlich beispielhaft über dem Intervall $[0, 1]$ bildlich veranschaulichen.
Zuerst tragen wir die ganzen Zahlen in bekannter Darstellung ein:

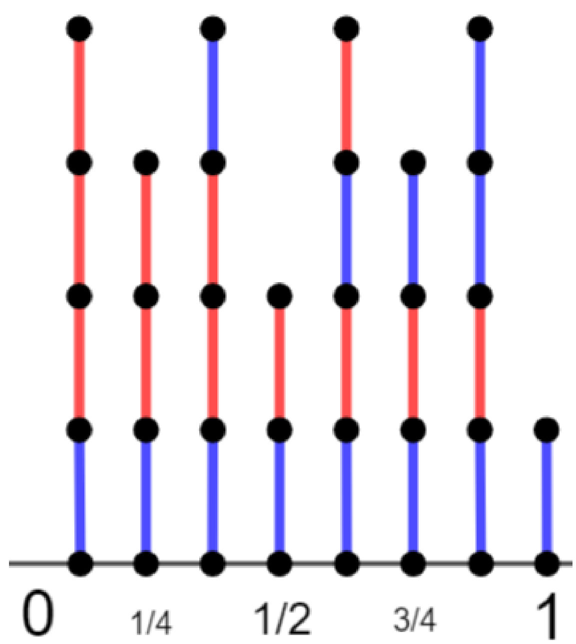


Nun konstruieren wir das Spiel in der Mitte zwischen zwei bekannten und benachbarten Spielen G und H mit $G \lhd H$, indem wir zunächst betrachten, welches Spiel die Darstellung mit der höheren Anzahl an Strichen besitzt. Dessen Darstellung kopieren wir in die Mitte unseres Intervalls. Befindet sich die kopierte Darstellung links von ihrem Original, so fügen wir einen roten Strich an der Spitze der Kopie hinzu. Befindet sie sich hingegen rechts, so fügen wir einen blauen Strich hinzu:



Dieses Verfahren führen wir nun sukzessive fort:





Dabei fällt insbesondere auf, dass die neu hinzugefügten Darstellungen in jedem Rekursionsschritt um genau einen Strich länger werden.

Aufgabe 23 Konstruieren Sie ein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel, das aus einem Stapel besteht, welches den Spielwert $-\frac{21}{8}$ besitzt.

6.3 Komische neue Spielwerte

Bisher haben wir ausschließlich Blau-Roten Hackenbush-Spielen Spielwerte zugeordnet. Doch was passiert, wenn wir Spiele mit grünen Strichen betrachten? Untersuchen wir dazu beispielsweise das Spiel G = **Grün**. Da $G \not\leq 0$, wissen wir bereits, dass wir G keine reelle Zahl als sinnvollen Spielwert (gemäß unserer Forderungen bzgl. Ordnung und Additivität) zuweisen können, da jede reelle Zahl ungleich 0 entweder eindeutig größer oder eindeutig kleiner als 0 ist. Wir nennen den Spielwert von G daher zunächst einfach $*$ (Stern).

Definition 6.5 $* := [\{0|0\}]$

Zwar ist $*$ keine reelle Zahl, trotzdem können wir durch die Gruppeneigenschaften, die sich auf die Spielwerte übertragen sollen, auf Eigenschaften von $*$ schließen. Die Spielwerte sind so konstruiert, dass sich $\{0|0\}$ zu den Spielen, deren Spielwerte reelle Zahlen sind, so verhalten muss, wie $*$ sich zu ebendiesen Zahlen verhält.
Wir wissen beispielsweise, dass $\{0|0\} + \{0|0\} \equiv \{|\}$. Daher muss auch $* + * = 0$ gelten. Dies ist offensichtlich eine Eigenschaft, der keine reelle Zahl $\neq 0$ genügen kann. Da aber $* \neq 0$, kann auch auf diese Weise begründet werden, dass $*$ nicht reell ist.

Aufgabe 24 Nutzen Sie Lemma 6.2 um zu zeigen, dass $* \lhd \frac{1}{2^n}$ für jede natürliche Zahl n.

Doch wie sieht es mit größeren, rein grünen Stapeln aus? Offensichtlich muss jeder dieser Stapel einen Spielwert bekommen, der kleiner als jede positive reelle Zahl und größer als jede negative reelle Zahl ist. Trotzdem dürfen ein Stapel der Länge m und ein Stapel der Länge n für $m \neq n$ nicht denselben Spielwert erhalten, denn die zugehörigen Spiele kommen aus unterschiedlichen Äquivalenzklassen:

Lemma 6.6 *Seien m, n natürliche Zahlen mit $m \neq n$. Für zwei rein grüne Hackenbush-Stapel G und H mit Längen m und n gilt dann $G \not\equiv H$.*

Beweis Nach Boutons Theorem sind die beiden Stapel bereits im Regelset NIM nicht äquivalent. Dann sind sie es auch nicht in $\mathcal{G}$. □

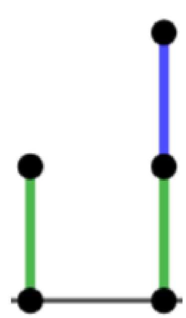
Aufgabe 25 (NIM-Wiederholung) Seien G und H wie in Lemma 6.6. Sei $m > n$. Geben Sie eine möglichst kurze Gewinnstrategie für die erste Spielerin an, sodass diese im Spiel $G + H$ ihren Sieg erzwingen kann. Folgern Sie daraus mit ihrem bisherigen Wissen, dass $G \not\equiv H$ ist.

Boutons Theorem verrät uns aber auch, wie wir einen Stapel I finden, der äquivalent zu $G + H$ ist. Dazu müssen wir lediglich die NIM-Werte von G und H mit $\oplus$ verknüpfen und erhalten die Binärdarstellung einer Zahl i, der Länge des Stapels I. Dies können wir nutzen, um die Spielwerte solcher Stapel zu beschreiben. An dieser Stelle schließt sich der Kreis zu der Definition 2.4, in der wir $*m$ als ein NIM-Spiel aus einem Stapel mit m Strichen definiert hatten. Ab jetzt bezeichnen wir auch den Spielwert eines solchen Spiels (und somit auch allen anderen Spielen dieser Äquivalenzklasse) mit $*m$. Nach Boutons Theorem ist dann sofort klar, dass sich die passenden Eigenschaften (bzgl. G) auf diese Zahlen übertragen lassen. Dazu addieren wir $*m$ und $*n$ so, dass $*m + *n = *i$ mit $\hat{i} = \hat{m} \oplus \hat{n}$.

Theorem 6.7 *Jedes unparteiische Kurzspiel G hat einen Spielwert $*n$ mit $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis Mit Sprague-Grundy 3.22 hat jedes unparteiische Kurzspiel einen NIM-Wert $\hat{n}$ und ist damit äquivalent zu dem NIM-Stapel mit Spielwert $*n$. □

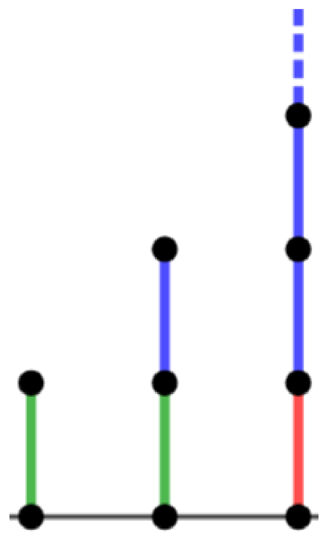
In den bisherigen Überlegungen haben wir uns ausschließlich Spielwerte für rein Blau-Rotes Hackenbush bzw. rein grünes Hackenbush angeschaut. Natürlich stellt sich nun die Frage, wie Spielwerte von Spielen aussehen, die sowohl blaue bzw. rote, als auch grüne Striche beinhalten. Wir betrachten dazu das bereits aus Kapitel 4 bekannte Spiel $G =$ **Grün,GrünBlau**.



$G =$ **Grün,GrünBlau**

Aus Kapitel 4 wissen wir bereits, dass Blau im Spiel G immer einen Sieg erzwingen kann, d.h. $o(G) = B > Z = o(0)$ und somit folgt mit Anwendung von Theorem 4.6 auch, dass $G \rhd 0$.

Wenn wir diese Beziehung nun auf den Spielwert von G übertragen wollen, muss gelten, dass der Spielwert von G größer als 0 sein muss. Weiterhin wissen wir aus Aufgabe 14, dass $G \not\lessgtr$ **Grün** $= *$, aber auch $* \not\lessgtr 0$. Jetzt stellt sich die Frage, ob wir für das Spiel G einen neuen Spielwert benötigen oder ob sich dieser aus bereits bekannten Spielwerten darstellen lässt. Dafür zeigen wir nun zuerst, dass der bisher unbenannte Spielwert x der Äquivalenzklasse von G kleiner als $\frac{1}{2^n}$ für jede natürliche Zahl n sein muss. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung:



$G + \frac{-1}{2^n}$

Dieses Spiel gewinnt immer Rot, unabhängig davon, ob er beginnt oder nicht. Die Taktik dafür sieht folgendermaßen aus: Solange grüne Striche vorhanden sind, entfernt Rot diese. Sobald keine grünen Striche mehr vorhanden sind gewinnt Rot automatisch, da die einzig verbliebene Verbindung zur Grundlinie rot ist. Für die Gewinnstrategie ist es nicht relevant, wie viele blaue Striche sich auf dem rechten Stapel befinden. Da aber der rechte Stapel die Darstellung des Spielwerts $\frac{-1}{2^n}$ ist, folgt direkt, dass der Spielwert x von G kleiner sein muss als $\frac{1}{2^n}$. Das heißt auch, dass der Spielwert von G kleiner sein muss als jede positive reelle Zahl.

Diese Tatsache kann auf den ersten (und auch auf den n-ten) Blick sehr verwirrend wirken. In unserem rein-reellen Zahlenverständnis gibt es keine Zahl, die sowohl kleiner als jede positive reelle Zahl, aber größer als 0 ist. Wir zeigen nun, dass wir tatsächlich einen neuen Spielwert für das Spiel G benötigen.

Lemma 6.8 *G = **Grün,GrünBlau** benötigt einen neuen Spielwert.*

Beweis Wir müssen zeigen, dass das Spiel G nicht äquivalent zu einem Spiel ist, das wir aus Spielen mit bereits bekannten Spielwerten durch disjunkte Addition erzeugen können.
Es ist offensichtlich, dass G nicht äquivalent zu einem unparteiischen Spiel sein kann, da $o(G) = B$. Das Spiel G kann aber auch nicht äquivalent zu den Spielen sein, die sich aus den bisher in diesem kapitel untersuchten rein Blau-Roten Hackenbush-Spielen durch Verknüpfung erzeugen lassen, da der Spielwert von G kleiner sein muss als jeder echt positive

Spielwert eines solchen Spiels, und gleichzeitig größer als 0 sein muss.
Es bleibt zu zeigen, dass wir durch Kombination von reellen Zahlen mit Spielwerten von NIM-Spielen den Spielwert von G nicht erhalten können, also, dass die disjunkte Addition eines NIM-Spiels mit einem solchen Blau-Rotem Hackenbush-Spiel nicht äquivalent zu G sein kann. Sei dazu ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \rhd 0$ der Spielwert eines Spiels H im Sinne unserer bisherigen Konstruktionen in Blau-Rotem Hackenbush und $*m$ ein NIM-Stapel. Wir wollen nun zeigen, dass $x + *m \rhd \frac{x}{2}$, also, dass $H + *m \rhd I$, wenn I ein Spiel mit Spielwert $\frac{x}{2}$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\frac{x}{2} + *m \rhd 0$. Dies ist äquivalent dazu, dass Blau das Spiel $I + *m$ gewinnt. Der Spielwert $\frac{x}{2}$ ist von der Form $\frac{a}{2^n}$ mit $a, n \in \mathbb{N}$. Sei I jetzt das Hackenbush-Spiel, welches a-mal aus dem Stapel besteht, der eine blaue Verbindung zur Grundlinie und darübergestapelt n rote Striche hat. Dann kann Blau ihren Sieg erzwingen, indem sie immer nur grüne Striche entfernt, solange solche vorhanden sind. Sobald keine mehr vorhanden sind, sind alle Verbindungen zur Grundlinie blau. Daher gilt $G \lhd I \lhd H + *m$. Somit brauchen wir hier definitiv einen neuen Spielwert. □

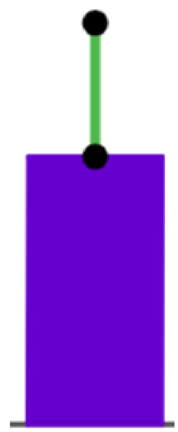
Definition 6.9
Wir definieren $\uparrow$ (Drüber) als den Spielwert von $G =$ **Grün,GrünBlau** $\equiv \{0|*\}$.
Analog nennen wir den Spielwert von $-G$ $\downarrow$ (Drunter).

Aufgabe 26 Wir nennen ein Kurzspiel G semifair, wenn sowohl Blau als auch Rot in G und in jeder nicht leeren Subposition von G ziehen können. Offensichtlich ist jedes unparteiische Spiel semifair.

a) Finden Sie ein semifaires Hackenbush-Spiel G, welches blaue, rote und grüne Striche enthält. Beweisen Sie zudem, dass dieses Spiel semifair ist.
b) Zeigen Sie, dass für den Spielwert x eines semifairen Spiels G gilt: $x \lhd 1$

6.4 Welche Spielwerte sind Zahlen?

Wir haben festgestellt, dass die von uns konstruierten Spielwerte sich teilweise wie reelle Zahlen verhalten und von uns dementsprechend auch wie diese benannt wurden. Andererseits gibt es auch Spielwerte wie $*$ und $\uparrow$, deren zugehörige Äquivalenzklassen in $\mathcal{G}$ Eigenschaften haben, die keine reelle Zahl erfüllen kann, beispielsweise das Verschwurbeln mit der 0 von $*$. Generell ist die Relation $\lesseqgtr$ nicht sinnvoll auf reelle Zahlen übertragbar. Aus Theorem 4.9 folgt, dass zwei Spiele G und H miteinander verschwurbelt sind, wenn $o(G - H) = E$. Dieser Fall kann aber in Blau-Rotem Hackenbush niemals eintreten, da $G - H$ ebenfalls ein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel ist, welches nach Lemma 2.7 nicht den Ausgang E haben kann. Um das Problem mit $\not\gtrless$ zu lösen, wollen wir die Menge der Kurzspiele einschränken, sodass alle Spielwerte, die zu der eingeschränkten Menge gehören, tatsächlich wie reelle Zahlen sind. Wie bereits in den bisher betrachteten Spielen aufgefallen ist, enthielten alle problematischen Hackenbush-Spiele grüne Striche. Wir machen uns an dieser Stelle klar, dass tatsächlich jedes Hackenbush-Spiel, das einen grünen Strich beinhaltet, mindestestens eine Subposition hat, die zu einem rein Blau-Roten Hackenbush-Spiel verschwurbelt ist. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung:



Der lilafarbene Kasten steht dabei für ein rein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel G, dass ausschließlich aus einer Komponente besteht. Wir fügen dem Stapel von G nun oben einen einzelnen grünen Strich hinzu. Für das so entstandene Spiel H gilt, dass $H \not\gtrless G$, da wir eine Gewinnstrategie für die erste Spielerin in $H-G$ angeben können. Dabei entfernt die erste Spielerin zu Beginn den einzelnen grünen Strich und gewinnt dann nach der Spiegelbildstrategie. Die Spiele G und H sind dementsprechend miteinander verschwurbelt, ihre Äquivalenzklassen können also nicht beide Zahlen sein. Wir wollen, dass der Spielwert jeder Subposition eines Spiels, das einen reellen Spielwert besitzt, ebenfalls reell ist, um Eigenschaften dieser Spiele besser studieren zu können. Da nun aber G eine Subposition von H ist, sollte nach dieser Überlegung $[H]$ keine Zahl sein.
Da das Hinzufügen eines grünen Striches nach der vorherigen Überlegung zu Problemen führt, ist kein Hackenbush-Spiel mit grünen Strichen als Repräsentant einer Zahl geeignet, denn diese Spiele besitzen Subpositionen, bei denen ein grüner Strich außen ist, und hätten dann eine Subposition, die wiederum keine Zahl als Spielwert haben kann.
Wir wollen diese Erkenntnis in Hackenbush nun auf allgemeinen Kurzspielen formalisieren. Ein grüner Strich kann in Hackenbush sowohl von Blau als auch von Rot entfernt werden. Ist also ein grüner Strich vorhanden, existiert mindestens eine blaue Option, die gleich einer roten Option ist. Diesen Fall wollen wir ausschließen. Aus Lemma 4.11 wissen wir, dass für ein beliebiges Kurzspiel G und jede blaue Option G^{B_1} sowie jede rote Option G^{R_1} gilt:

$$G^{B_1} \blacktriangleleft G \blacktriangleleft G^{R_1}$$

Zahlen sollen allerdings nicht mit ihren Subpositionen verschwurbelt sein. Daher soll nun gelten:

$$G^{B_1} \lhd G \lhd G^{R_1}$$

Aus diesen Vorüberlegungen ergibt sich nun folgende Definition eines Spiels, dessen Spielwert eine Zahl ist:

Definition 6.10
Den Spielwert x eines Kurzspiels G bezeichnen wir als Zahl, falls für jede Subposition H von G gilt, dass $H^{B_1} \lhd H^{R_1}$ für beliebige blaue bzw. rote Optionen von H.
Hat G als Spielwert eine Zahl x, so schreiben wir abkürzend x für das Spiel G und nennen G, beziehungsweise dessen Äquivalenzklasse, eine Zahl.

Aus der Definition wird sofort klar, dass Subpositionen von Zahlen ebenfalls wieder Zahlen sind. Ebenso muss auch die disjunkte Summe zweier Zahlen (also Kurzspielen, deren Spielwerte Zahlen sind) wieder eine Zahl sein.

Lemma 6.11 *Sei G ein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel. Dann ist der Spielwert von G eine Zahl.*

Beweis Es gilt zu zeigen, dass für eine beliebige Subposition H von G gelten muss, dass $H^{B_1} \lhd H^{R_1}$ für beliebige blaue und rote Optionen von H. Die Subposition H ist mitsamt den zugehörigen Optionen als Subposition von G ebenfalls blau-rot. Des Weiteren wissen wir aus Lemma 4.11, dass $H^{B_1} \blacktriangleleft H \blacktriangleleft H^{R_1}$. Wir können nun relativ einfach prüfen, dass dann auch $H^{B_1} \lhd H$ gilt. Angenommen, es gelte stattdessen $H^{B_1} \ntrianglelefteq H$. Dann folgt aus Theorem 4.9, dass $o(H^{B_1} - H) = E$. Da allerdings $H^{B_1} - H$ ein Blau-Rotes Hackenbush-Spiel ist, steht dies im Widerspruch zu Lemma 2.7. Also gilt $H^{B_1} \lhd H$ und durch ein analoges Argument $H \lhd H^{R_1}$ und somit $H^{B_1} \lhd H^{R_1}$ und der Spielwert von G ist eine Zahl. □

Aufgabe 27 Kontrollieren Sie beispielhaft die Definition 6.10, indem Sie diese verwenden, um zu zeigen, dass $\frac{1}{2}$ eine Zahl ist und $\uparrow$ nicht.

Aufgabe 28 Seien x und y Zahlen. Zeigen Sie, dass auch $x + y$ eine Zahl ist.

Lemma 6.12 *Die Menge $\mathbb{U}$ der Äquivalenzklassen von Spielen, deren Spielwerte Zahlen sind, bildet eine Untergruppe von $\mathcal{G}$.*

Beweis Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{U}$ abgeschlossen ist und das neutrale sowie inverse Elemente besitzt.
Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus Aufgabe 28. Das neutrale Element ist über das leere Spiel enthalten, das die Definition einer Zahl offensichtlich erfüllt, da dieses gar keine Subpositionen besitzt.

Die Existenz der Inversen folgt direkt aus der rekursiven Definition der inversen Elemente in $\mathcal{G}$, da sich beim inversen Spiel die Optionen über die inversen Subpositionen ergeben, die ebenfalls Zahlen sein müssen. □

Wir haben zu Anfang dieses Kapitels gezeigt, dass wir Spielwerte konstruieren können, welche die Form $\frac{m}{2^n}$ besitzen. Die Menge aller Äquivalenzklassen von Spielen mit dazu passendem Spielwert nennen wir $\mathbb{D}$. Jetzt stellt sich die Frage, ob diese Zahlen tatsächlich die einzigen sind, die wir mit Kurzspielen erzeugen können. Also, ob $\mathbb{U} = \mathbb{D}$ ist.

Definition 6.13 Wir nennen $I \subset \mathbb{D}$ ein Intervall, wenn aus $x, y \in I$ und $z \in \mathbb{D}$ mit $x \leqq z \leqq y$ folgt, dass $z \in I$.

Diese Definition eines Intervalls bezieht sich zunächst einmal nur auf Zahlen, und zwar auf solche, die wir als Bruch mit Zweierpotenz im Nenner darstellen können. Wir gehen des Weiteren davon aus, dass sich die zugehörigen Repräsentanten in kanonischer Form befinden. Zur Vorbereitung der Antwort auf unsere Frage benötigen wir als Hilfe folgendes Lemma:

Lemma 6.14 *Sei $I \subset \mathbb{D}$ ein nichtleeres Intervall. Dann gibt es genau ein $x \in I$, bei dem der längstmögliche Spielverlauf kürzer ist als der aller anderen Elemente von I.*

Beweis Angenommen, es gäbe zwei solche Spiele x und y mit $x \lhd y$ (Wir können von mindestens zwei Elementen in I ausgehen, da die Aussage ansonsten trivial wäre). Unter dieser Annahme zeigen wir, dass es dann ein weiteres Spiel $z \in I$ gibt, dessen längstmöglicher Spielverlauf kürzer ist als der von x bzw. y und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme. Dieses z finden wir folgendermaßen:
Da $x \lhd y$, wissen wir, dass Blau in $y - x$ ihren Sieg insbesondere auch als erste Spielerin erzwingen kann. D.h. es ist entweder $y^{B_1} \geqq x$ oder $y \geqq x^{R_1}$ für ein entsprechendes B_1 (beziehungsweise R_1) mit x und y in kanonischer Form, da Blau in dem Spiel, welches sie Rot übergibt, als zweite Spielerin ihren Sieg erzwingen können muss. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

$y^{B_1} \geqq x$
Da y eine Zahl ist, sind auch alle Optionen von y Zahlen, und mit Definition 6.10 folgt dann, dass $y^{B_1} \lhd y$. Das heißt, wenn $y^{B_1} \geqq x$, dann muss y^{B_1} bereits in I enthalten sein, da $y^{B_1} \in \mathbb{D}$ und $x \leqq y^{B_1} \leqq y$ erfüllt ist.

$y \geqq x^{R_1}$
Mit einer analogen Argumentation folgt, dass x^{R_1} in I enthalten sein muss.

Dies zeigt, dass es eine Option y^{B_1} oder x^{R_1} geben muss, die ebenfalls im Intervall I enthalten ist. Da x und y in kanonischer Form waren, sind auch die jeweiligen Optionen in kanonischer Form. Somit ist der längstmögliche Spielverlauf von y^{B_1} kürzer als der von y und der längstmögliche Spielverlauf von x^{R_1} kürzer als der von x. Da aber y^{B_1} oder x^{R_1} in I enthalten sein müssen, haben wir somit ein passendes Spiel gefunden (welches wir z nennen) und den Widerspruch konstruiert. □

Zusätzlich benötigen wir auch noch folgendes Lemma:

Lemma 6.15 *Sei G ein Kurzspiel. Setzen wir I*

$$I = \{x \in \mathbb{D} : G^{B_i} \blacktriangleleft x \blacktriangleleft G^{R_j} \text{ für alle } G^{B_i} \text{ und } G^{R_j}\}$$

Falls I nicht leer ist, dann ist $G \equiv x$, wobei $x \in \mathbb{D}$ das Spiel mit dem kürzesten längsten Spielverlauf ist.

Beweis Es genügt zu zeigen, dass $G - x \geqq 0$ und $G - x \leqq 0$. Wir zeigen nur den Fall $G - x \geqq 0$. Der andere verläuft komplett analog.
Zu zeigen ist also, dass Blau als zweite Spielerin einen Sieg in $G - x$ erzwingen kann. Rot hat als Startspieler die Möglichkeiten in G oder in $-x$ zu ziehen.

Rot zieht in G:
Rot zieht auf ein Spiel $G^{R_j} - x$. Da $x \in I$, wissen wir nach Konstruktion, dass $x \blacktriangleleft G^{R_j}$. Dann kann Blau ihren Sieg garantieren, da nach Theorem 4.9 $o(G^{R_j} - x) \in \{B, E\}$.

Rot zieht in $-x$:
Rot zieht auf ein festes Spiel $G - x^{B_1}$, wegen der Definition des Inversen. Da der längste Spielverlauf von x^{B_1} definitiv um mindestens einen Zug kürzer ist als der längste mögliche Spielverlauf in x, x jedoch nach Annahme eindeutig den kürzesten längsten Spielverlauf in I hat, kann x^{B_1} nicht in I liegen. Da x^{B_1} nicht in I liegt, ist entweder $x^{B_1} \leqq G^{B_i}$ oder $G^{R_i} \leqq x^{B_1}$. Da x eine Zahl ist, gilt ist $x^{B_1} \lhd x$. Damit wäre also im zweiten Fall $G^{R_i} \leqq x$, was ein Widerspruch zur Annahme von $x \in I$ wäre. Dementsprechend kann nur $x^{B_1} \leqq G^{B_i}$ und somit $G^{B_i} - x^{B_1} \geqq 0$. Das heißt $o(G^{B_i} - x^{B_1}) \in \{B, Z\}$. Und somit kann Blau nach ihrem Zug auf G^{B_i} ihren Sieg als zweite Spielerin in $G^{B_i} - x^{B_1}$ und damit auch im ursprünglichen Spiel $G - x$ garantieren. □

Nun sind wir in der Lage, die anfängliche Frage nach den durch Kurzspiele konstruierbaren Zahlen zu beantworten:

Theorem 6.16 *Die durch Kurzspiele konstruierbaren Zahlen $\mathbb{U}$ sind genau die Bruchzahlen mit Zweierpotenz im Nenner $\mathbb{D}$.*

Beweis Sei z eine Zahl. Dann ist $I = \{x \in \mathbb{D} : z^{B_i} \blacktriangleleft x \blacktriangleleft z^{R_j}$ für alle z^{B_i} und $z^{R_j}\}$ nicht leer, da $z^{B_i} \lhd z \lhd z^{R_j}$ und damit $z^{B_i} \lhd z^{R_j}$. Des Weiteren sind z^{B_i} und z^{R_j} ebenfalls Zahlen. Zwischen zwei unterschiedlich großen Zahlen können wir immer ein Element x von $\mathbb{D}$ finden, welches zwischen diesen liegt. Aus Lemma 6.15 folgt nun die eindeutige Existenz eines $x_1 \in I$, sodass $z \equiv x_1$. Da $x_1 \in I$ und $I \subset \mathbb{D}$, gilt auch $x_1 \in \mathbb{D}$. □

Korollar 6.17 *Zu jedem Blau-Rotem Hackenbush-Spiel gibt es ein äquivalentes Blau-Rotes Hackenbush-Spiel, welches aus einer nicht verzweigten Komponente besteht.*

Beweis Folgt direkt aus Korollar 6.4, Lemma 6.11 und Theorem 6.16. □

Wir haben uns nun ausgiebig mit der Struktur der durch Kurzspiele konstruierbaren Zahlen auseinander gesetzt. Nun stellt sich einerseits die Frage, wie sich andere bekannte Strukturen auf die Menge der Kurzspiele übertragen lassen und andererseits, welchen Nutzen das Wissen um die Existenz von Zahlen hat, um Spiele besser spielen zu können. Diesen beiden Fragen wollen wir nun noch auf den Grund gehen.

Unser natürliches Zahlenverständnis ermöglicht es uns, auf den natürlichen und ganzen Zahlen zwischen geraden und ungeraden Zahlen zu unterscheiden. Wir wollen nun überlegen, ob eine solche Unterscheidung auch für Kurzspiele möglich ist. Dabei wollen wir nicht nur die Zahlen ggf. nach gerade bzw. ungerade unterscheiden, sondern möglicherweise auch Spiele, deren Spielwert keine Zahl ist. Der grundsätzliche Aufbau von Kurzspielen erfolgt über eine rekursive Definition, dementsprechend kann es sinnvoll sein, auch gerade bzw. ungerade Spiele rekursiv zu definieren. Die rekursive Definition eines Kurzspiels startet grundsätzlich beim leeren Spiel. Wenn wir dem naiven Ansatz folgen, würden wir also das leere Spiel 0 als gerades Spiel definieren und von dort fortfahren. Dies führt zu folgender Definition:

Definition 6.18 Wir nennen ein Kurzspiel G gerade, wenn alle Optionen der kanonischen Form von G ungerade sind. Ein Kurzspiel G nennen wir ungerade, wenn $G \ncong 0$ und alle Optionen der kanonischen Form von G gerade sind.

Bei dieser Definition muss man aufpassen, da explizit $G \ncong 0$ gemeint ist. Dies ist eine stärkere Aussage als $G \not\equiv 0$. Äquivalenz von Spielen betrachtet nur die Ausgänge, während Isomorphie auf Spielen natürlich auch Strukturerhaltung fordert. Beispielsweise sind natürliche die beiden Spiele $G = 0$ und $H =$ **Grün,Grün** äquivalent bzgl. $\equiv$ aber keinesfalls isomorph, da G keine Subpositionen hat, H aber schon.

Aufgabe 29 Überprüfen Sie bei den folgenden Spielwerten, ob diese gerade, ungerade oder keines von beidem sind:

a) $1, 0, *, \frac{1}{2}$
b) $\uparrow,\ *m$ für alle $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}$
c) $1 + *$

Nach unserem natürlichen Zahlenverständnis gilt, dass die Summe zweier gerader Zahlen ebenfalls wieder eine gerade Zahl ist. Nun stellt sich die Frage, ob die Definition von gerade und ungerade auf Spielen diese (und weitere) Eigenschaften ebenfalls erfüllt.

Lemma 6.19 *Seien G, H Kurzspiele. Dann gilt:*

a) Wenn G gerade ist und H ungerade (oder umgekehrt) ist, so ist $G + H$ ungerade.
b) Wenn G gerade ist und H gerade ist, so ist $G + H$ gerade.
c) Wenn G ungerade ist und H ungerade ist, so ist $G + H$ gerade.

Beweis Wir beweisen alle drei Fälle gleichzeitig induktiv. Dazu müssen wir die Optionen von $G + H$ in der disjunkten Summe betrachten.

$$G + H = \{G^B + H,\ G + H^B \mid G^R + H,\ G + H^R\}$$

Wenn G gerade ist, sind alle Optionen aus G^B und G^R ungerade. Andererseits sind alle Optionen aus H^B und H^R gerade, wenn H ungerade ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann alle Optionen von $G + H$ gerade, da wir als mögliche Summe entweder zwei gerade Spiele oder zwei Spiele addieren. Somit ist $G + H$ ungerade.

Sei nun G gerade und H gerade. Dann sind alle Optionen aus G^B, G^R, H^B und H^R ungerade. Nach Induktionsvoraussetzung sind dann alle Optionen von $G + H$ ungerade, da wir jeweils immer ein gerades und ein ungerades Spiel addieren. Dementsprechend ist $G + H$ gerade.

Sind nun sowohl G als auch H ungerade. Dann sind alle Optionen aus G^B, G^R, H^B und H^R gerade. Analog zum vorigen Fall addieren wir somit in der Summe jeweils ein gerades und ein ungerades Spiel. Damit sind alle Optionen von $G+H$ ungerade und $G+H$ ist gerade. □

Aufgabe 30 Zeigen Sie, dass $A = \{G \in \mathcal{G} \mid G \text{ ist gerade}\}/\equiv$ und $B = \{G \in \mathcal{G} \mid G \text{ ist gerade oder ungerade}\}/\equiv$ mit der disjunkten Summe $+$ als Gruppenverknüpfung Untergruppen von $\mathcal{G}$ bilden.

6.5 Besser spielen durch Zahlen

Unser wesentliches Ziel ist es, all die formulierte Theorie zu nutzen, um Kurzspiele besser spielen zu können. Doch was bedeutet es, Kurzspiele „besser“ zu spielen? Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass jedes Kurzspiel in einer unserer vier Ausgangsklassen liegt. In einer konkreten Spielsituation steht also bereits fest, wer den Sieg erzwingen kann. Jeder Zug dieser Person ist also entweder bereits perfekt, wenn er Teil einer Gewinnstrategie ist, oder er ist schlecht. Natürlich kann es auch verschiedene Züge geben, die jweiels Teil einer Gewinnstrategie sind, die auf Subpositionen ziehen, die sich gemäß $\geqq$ unterscheiden. In einem konkreten Spiel, bei dem eine Strategie für das gesamte Spiel bekannt ist, und wir nicht mehr einzelne Komponenten eines größeren Spiels untersuchen, ist eine Unterscheidung solcher Subpositionen mit $\geqq$ nicht mehr nötig, da man in beiden gleichermaßen gewinnt. Alle schlechten Züge

könnte man demnach auch als gleichermaßen schlecht ansehen, da sie dem Gegner potentiell den Sieg schenken, sollte dieser perfekt ziehen. Eine Möglichkeit, die eigene Spielweise zu verbessern, bietet sich durch Handwerkszeug, das es ermöglicht, perfekte Züge mit weniger Aufwand zu finden.
Dies ermöglicht der folgende Satz, der unter bestimmten Voraussetzungen die Menge der Optionen, die dazu untersucht werden müssen, einschränkt:

Theorem 6.20 (Satz der Zahlvermeidung)
Sei G ein Kurzspiel, welches in der Äquivalenzklasse einer Zahl x liegt und sei H ein Kurzspiel, das nicht in der Äquivalenzklasse einer Zahl liegt. Wenn Blau als erste Spielerin in $G + H$ einen Sieg erzwingen kann, dann gibt es eine Gewinnstrategie, in der sie zuerst in H auf ein H^{B_j} zieht.

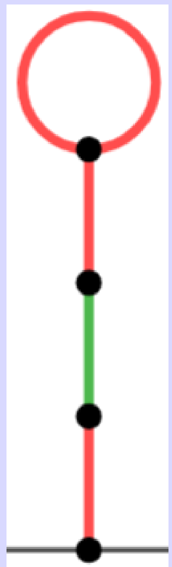
Beweis Wir wissen, dass $G + H \blacktriangleright 0$ gelten muss, da Blau eine Gewinnstrategie als erste Spielerin besitzt. Wir wissen auch, dass Blau als erste Spielerin entweder in G oder in H ziehen muss. Da Blau nach Annahme eine Gewinnstrategie hat, muss ihr erster Zug gemäß dieser Strategie entweder von der Form $G^{B_i} + H$ oder $G + H^{B_j}$ sein. Ist er von der zweiten Form, so gilt die Aussage offensichtlich.
Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, dass der erste Zug der bekannten Gewinnstrategie von Blau auf $G^{B_i} + H$ zieht. Wenn wir unter dieser Bedingung zeigen können, dass Blau dann auch eine andere Gewinnstrategie haben muss, bei der zuerst in H gezogen wird, sind wir fertig. Dies können wir durch Induktion über G zeigen:
Wir können der Einfachheit halber davon ausgehen, dass sowohl G als auch H in kanonischer Form sind. Nehmen wir nun an, dass die Gewinnstrategie von Blau einen Zug in G vorsieht. Dann gilt offensichtlich $G^{B_i} + H \geqq 0$, denn Blau muss dort als zweite Spielerin ihren Sieg garantieren können. Da H nicht in der Äquivalenzklasse einer Zahl liegt, G und somit auch G^{B_i} aber schon, ist der Fall $G^{B_i} \equiv H$ ausgeschlossen und es gilt $G^{B_i} + H \vartriangleright 0$. Das bedeutet, dass Blau einen Sieg in $G^{B_i} + H$ erzwingen kann. Da G^{B_i} in der Äquivalenzklasse einer Zahl und eine blaue Option in G ist, können wir nach Induktionsvoraussetzung annehmen, dass eine Gewinnstrategie von Blau in $G^{B_i} + H$ einen ersten Zug der Form $G^{B_i} + H^{B_j}$ enthält. Wir wissen aber, dass $G^{B_i} \vartriangleleft G$ (da G in der Äquivalenzklasse einer Zahl liegt) und somit gilt:

$$G + H^{B_j} \vartriangleright G^{B_i} + H^{B_j} \geqq 0$$

Das bedeutet, Blau muss als erste Spielerin auch eine Gewinnstrategie für $G + H$ besitzen, deren erster Zug in H liegt. □

Was bringt uns dieser Satz nun konkret? Angenommen, wir spielen ein Kurzspiel G, welches aus zwei nicht notwendigerweise zusammenhängenden Komponenten besteht. Besitzt eine dieser Komponenten als Spielwert eine Zahl und die andere nicht, dann genügt es nach einem perfekten Zug in der Komponente zu suchen, die als Spielwert keine Zahl besitzt. Das bedeutet ganz konkret, dass wir weniger Aufwand bei der Suche nach einem möglicherweise perfekten Zug haben, da wir deutlich weniger Optionen betrachten müssen.

Aufgabe 31 Nutzen Sie den Satz der Zahlvermeidung 6.20, um zu zeigen, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit Blau als erste Spielerin einen Sieg im Spiel $G+H$ erzwingen kann, wenn H als Spielwert eine Zahl besitzt.



G

Kapitel 7
Ausblick

7.1 Gibt es noch mehr?

Wir haben uns nun ausgiebig mit Kurzspielen auseinandergesetzt und viele Visualisierungen in Hackenbush gesehen. Wir haben festgestellt, dass wir Spielwerte erzeugen können, die bestimmten reellen Zahlen entsprechen. Darüber hinaus haben wir aber auch Spielwerte gefunden, die sich unserem natürlichen Zahlenverständnis entziehen, wie beispielsweise $*$ und $\uparrow$. Wir wissen auch, dass jedes Blau-Rote Hackenbush-Spiel eine Zahl ist und sich sogar in einem Stapel darstellen lässt. Doch was ist mit anderen Zahlen? Was ist mit Brüchen, die wir in Hackenbush bisher nicht darstellen konnten? Ist dies gar nicht möglich oder haben wir uns in unseren bisherigen Definitionen selbst limitiert?
Ein essentieller Aspekt von Kurzspielen ist, dass es nur endlich viele Subpositionen geben kann. Doch was passiert, wenn wir nun erlauben, dass ein Spiel (Wir betrachten Hackenbush) auch unendlich viele Subpositionen haben darf? Wir könnten beispielsweise erlauben, dass wir nicht in endlich vielen, sondern in unendlich vielen Komponenten spielen. Welche Möglichkeiten ergeben sich dann? Die geometrische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^n = \tfrac{1}{3}$$

liefert uns eine Darstellung von $\frac{1}{3}$ als Summe von Zahlen, für die wir in Blau-Rotem Hackenbush eine Darstellung kennen. Intuitiv könnten wir also einfach diese unendlich vielen Komponenten nebeneinander schreiben und hätten somit eine Darstellung (wir nennen diese hier G_∞) von $\frac{1}{3}$ in Hackenbush gefunden. Problematisch wird das Ganze, wenn wir miteinbeziehen, wie wir unsere Spielwerte konstruiert haben. Wir müssten garantieren, dass:

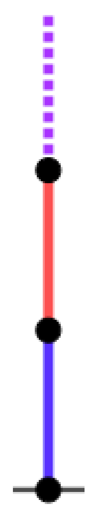
$$G_\infty + G_\infty + G_\infty + (-1) \equiv 0$$

Jetzt haben wir aber das Problem, dass wir das Spiel G_∞ schon niemals fertig spielen können. Nach unserer bisherigen Definition müsste der zweite Spieler seinen Sieg in $G_\infty + G_\infty + G_\infty + (-1)$ garantieren können. Dies zu beweisen wird schwierig, wenn wir das Spiel niemals beenden können. Wir scheinen an einem Engpass angekommen zu sein.
Unendlich viele Komponenten liefern uns die Problematik, dass ein Spiel nicht beendet werden kann, da jede Komponente beendet werden müsste. Wie sieht das Ganze aber bei einer

unendlich langen Komponente aus? Dabei würden wir das Problem, dass ein Spiel nicht beendet werden kann, geschickt umgehen, denn nach dem ersten Zug in einer unendlichen Komponente haben wir nur noch eine endliche Komponente und diese kann beendet werden. Gelingt es uns also die Überlegung für die Zahl $\frac{1}{3}$ auf einen unendlich hohen Stapel anzuwenden? Wir erinnern uns an den Algorithmus aus Korollar 6.4. Dieser ermöglichte es uns den Zahlenstrahl mit Spielen der Form $\frac{m}{2^n}$ zu füllen, indem wir immer wieder die Darstellung der Mitte zwischen zwei solchen Spielen erzeugt haben. Für ein bestimmtes Spiel der Form $\frac{m}{2^n}$ war dies offensichtlich ein endlicher Prozess, um dieses Spiel tatsächlich zu erzeugen. Wir könnten also den gleichen Algorithmus anwenden, um eine Darstellung der Zahl $\frac{1}{3}$ zu konstruieren. Der einzige Unterschied ist, dass dieser uns dann natürlich eine unendliche Darstellung für $\frac{1}{3}$ liefert, was die Definition eines Kurzspiels verletzt. Trotzdem erwarten wir, auf diese Weise für jede beliebige reelle Zahl eine eindeutige (nur eben eventuell nicht mehr endliche) Darstellung zu finden, da die Menge unserer durch Äquivalenzklassen von Kurzspielen aus $\mathbb{D}$ darstellbaren Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

An dieser Stelle können wir also feststellen, dass unsere Jagd nach Spielwerten, die unserem natürlichen Zahlenverständnis entsprechen, noch lange nicht abgeschlossen ist. Die Kombinatorische Spieltheorie bietet uns dahingehend noch viele Möglichkeiten. Also auf die Jagd!

Betrachten wir zunächst das Hackenbush-Spiel $G_{BlauRot_\infty}$, welches aus einer unendlichen Komponente besteht, in der sich, von der Grundlinie startend, immer blaue und rote Striche abwechseln:



$G_{BlauRot_\infty}$

Wir wollen nun den Algorithmus aus 6.4 verwenden, um die zugehörige Zahl zu bestimmen. Wir tun dies rekursiv, indem wir den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Zahlen der Subpositionen von $G_{BlauRot_\infty}$ mit n Strichen bestimmen. Dazu betrachten wir den Zahlenstrahl an der Stelle 0. Das Hinzufügen des ersten blauen Striches erzeugt ein Spiel, dessen Spielwert um 1 größer ist als der Spielwert des Spiels mit 0 Strichen. Der erste rote Strich, und damit der zweite Strich insgesamt, verringert den Spielwert um $\frac{1}{2}$, also um die Hälfte der vorherigen Distanz. Der dritte Strich ist wieder blau und erhöht die zugehörige Zahl von $\frac{1}{2}$ auf $\frac{3}{4}$, also um ein $\frac{1}{4}$, was erneut der Hälfte der vorherigen Distanz entspricht. Wir erkennen ein Schema, und zwar das einer alternierenden geometrischen Summe. Mit Hilfe dieser können wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bestimmen:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^n}(-1)^i$$

Der Grenzwert a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten wir dann durch die entsprechende Reihe:

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(-1)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

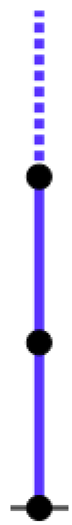
Wenn dieses Spiel $G_{BlauRot_\infty}$ tatsächlich der Zahl $\frac{2}{3}$ entsprechen sollte $3 \cdot G_{BlauRot_\infty} + 2 \cdot (-1) \equiv 0$ gelten. Dies können durch die Angabe einer Gewinnstrategie für den zweiten Spieler dieses Spiels auch überprüfen. Da wir uns hier in einem Ausblick befinden, werden wir diese Taktik allerdings nicht formal angeben und beweisen, sondern nur deren Idee erläutern:

Gehen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit einmal davon aus, dass Blau beginnt. Dann wird Blau in der ersten Komponente der Gestalt $G_{BlauRot_\infty}$ ziehen. Nach diesem Zug hat das verbliebene Spiel den Wert a_n mit n gerade. Also ist a_n vor allem auch echt kleiner als $\frac{2}{3}$. Wenn Rot nun als Zweites zieht, kann er in der zweiten Komponente $G_{BlauRot_\infty}$ einen höheren Strich entfernen und beispielsweise auf den Wert a_{n+1}. Es gilt, dass die Summe von a_n und a_{n+1} echt kleiner als $\frac{4}{3}$ ist. Zieht Blau nun in der dritten Komponente, so ist der Spielwert des gesamten Spiels echt kleiner 0. Zieht Blau stattdessen in einer der ersten beiden Komponenten, so ist der Wert der Summe dieser kleiner als zuvor. Rot kann dann durch einen Zug in der dritten Komponente $G_{BlauRot_\infty}$ antworten, auf einen Wert, der nah genug an $\frac{2}{3}$ ist, sodass die dem ganzen Spiel entsprechende Zahl echt negativ ist. Somit gewinnt Rot als zweiter Spieler. Sollte Blau als zweites spielen, so funktioniert dies analog. Wichtig ist nur, dass der zweite Spieler „höher" zieht als die erste Spielerin.

7.2 Wir bauen uns ein Omega!

Nachdem wir jetzt unendlich große Komponenten zugelassen haben, können wir uns natürlich auch die Frage stellen, was wir damit ggf. noch anfangen können. Aus dem Algorithmus von Korollar 6.4 wird schnell klar, dass jedes Blau-Rote Hackenbush-Spiel aus einer Komponente (sei diese endlich oder unendlich groß) immer eine reelle Zahl repräsentieren muss, sofern sowohl blaue als auch rote Striche enthalten sind.

Doch was passiert, wenn wir die roten Striche verbieten und uns rein blaue Komponenten anschauen? Offensichtlich hat nach Definition 6.1 das Blau-Rote Hackenbush-Spiel, das aus einer rein blauen Komponente mit n Strichen besteht, den Spielwert n. Doch wie sieht das Ganze aus, wenn wir diese Komponente unendlich groß werden lassen? Wir bezeichnen dieses Spiel als G_{Blau_∞}.



G_{Blau_∞}

Wenn wir das Spiel G_{Blau_∞} formal definieren wollen, dann müssen wir natürlich die blauen und roten Optionen betrachten. Offensichtlich hat Rot im Spiel G_{Blau_∞} keine Optionen. Betrachten wir nun die blauen Optionen. Blau kann auf jede natürliche Zahl $n \in N$ ziehen. Andere Möglichkeiten hat Blau allerdings nicht.

$$G_{Blau_\infty} = \{0, 1, 2, ... \big| \}$$

Betrachten wir dies mengentheoretisch, so erkennen wir, dass die Menge der blauen Optionen von G_{Blau_∞} genau die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind. Weiterhin beinhaltet jede natürliche Zahl n als blaue Optionen alle natürlichen Zahlen echt kleiner als n. Unser Spiel G_{Blau_∞} scheint also Parallelen zur Ordinalzahl ω aufzuweisen.

Neben Zahlen, die kleiner sind als jede reelle Zahl (beispielweise $*$), haben wir uns nun also auch in die andere Richtung bewegt. Wir können möglicherweise also auch Ordinalzahlen wie ω in Hackenbush darstellen.

Die Definition 3.2 der disjunkten Summe arbeitet zwar mit den Optionen der zu verknüpfenden Spiele, verwendet allerdings nicht die Bedingung, dass es davon nur endlich viele geben darf. Wir könnten uns an dieser Stelle auch vorstellen, diese Verknüpfung auch auf Spiele mit unendlich vielen Optionen, wie beispielweise ω, anzuwenden, um andere Ordinalzahlen wie $\omega + 1$ oder $\omega 2$ zu erzeugen. Ob diese Verknüpfung sinnvoll ist, also ob die auf diese Weise erzeugten Spielwerte auch die Rechenregeln für Ordinalzahlen erfüllen, ist an dieser Stelle aber noch nicht geklärt. Des Weiteren könnten wir uns vorstellen, (unendliche) Ordinalzahlen mit Brüchen zu verknüpfen, was bisher überhaupt nicht definiert war.
Betrachten wir zunächst einmal die disjunkte Summe von ω und 1:

$$\omega + 1 = \{\omega + 0, 0 + 1, 1 + 1, 2 + 1, ... \big| \}$$

Insbesondere gilt $\omega + 1 = 1 + \omega$, was nach Konstruktion der herkömmlichen Ordinalzahlen nicht gilt, da in diesen $1 + \omega = \omega < \omega + 1$ gilt.

An dieser Stelle müsste man mehr in die Tiefe gehen, als es für einen Ausblick angemessen ist, um sinnvoll weitermachen zu können. Dazu müssten wir die Theorie der Kurzspiele verlassen, anhand derer wir in die kombinatorische Spieltheorie eingeführt haben. Die weitere Auseinandersetzung mit der Thematik kann allerdings sehr lohnenswert sein, denn dann können wir unter anderem weitere Spielwerte wie zum Beispiel „überdrüber“:= $\{0 \mid \text{überdrüber}\}$ (Wie würde dieses Spiel in Hackenbush aussehen?) entdecken.

7.3 Abschließende Anmerkungen

Offensichtlich haben wir mit dieser Arbeit nur einen kleinen Schritt in die große Welt der kombinatorischen Spieltheorie gewagt. Auf unserer Reise haben wir Spiele gefunden, die sich wie reelle Zahlen verhalten. Wir haben Spiele gefünden, deren Spielwert kleiner, aber auch welche, deren Spielwert größer als jede reelle Zahl ist. Wir haben in dieser Arbeit mit Kurzspielen gearbeitet, um in die kombinatorische Spieltheorie einzuführen, haben nun aber festgestellt, dass diese noch weit mehr zu bieten hat. Spiele zu studieren ist also nicht unbedingt nur reiner Selbstzweck. Wir können an und mit ihnen auch die große Welt der Zahlen besser ergründen.
Wir hoffen, dass es uns in dieser Arbeit ansatzweise gelungen ist, die Schönheit der kombinatorischen Spieltheorie vorzustellen, durch Beispiele mit Leben zu füllen und einen Anreiz zu schaffen, selbst in diese zauberhafte Welt einzutauchen.

Kapitel 8
Lösungen der Aufgaben

8.1 zu Kapitel 1

Aufgabe 1

Wir hoffen, dass Sie angemessen viel gespielt haben!

8.2 zu Kapitel 2

Aufgabe 2

Der NIM-Wert des Spiels G ist $1001_2 = 9$. Somit ergibt sich ein Spiel mit dem gleichen NIM-Wert: $G' = [9]$.

Aufgabe 3

Damit die erste Spielerin einen Sieg erzwingen kann, muss der NIM-Wert von G ungleich 0 sein. Wir erzeugen die Binärdarstellungen der einzelnen Stapel:

$$3_{10} = 0011_2,\ 4_{10} = 0100_2,\ 5_{10} = 0101_2,\ 6_{10} = 0110_2,\ 7_{10} = 0111_2,\ 8_{10} = 1000_2, \text{ und } 9_{10} = 1001_2$$

Es ergibt sich für den NIM-Wert von G:

$$\begin{array}{r} 0011_2 \\ \oplus\ 0100_2 \\ \oplus\ 0101_2 \\ \oplus\ 0110_2 \\ \oplus\ 0111_2 \\ \oplus\ 1000_2 \\ \oplus\ 1001_2 \\ \hline 0010_2 \end{array}$$

Damit kann die erste Spielerin einen Sieg erzwingen. Dazu muss sie mit ihrem ersten Zug einen NIM-Wert von $0 = 0000_2$ erzeugen, was ihr gelingt, indem sie die 1 auf dem 2er-Bit kippt und alle anderen unangetastet lässt. Perfekte Startzüge können also nur im Stapel [3],[6] oder [7] liegen. In diesen Stapeln muss sie jeweils 2 Striche entfernen. Die drei möglichen Züge gemäß der Gewinnstrategie wären also die Züge auf die Spiele:

$$G' = [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9],\ G'' = [3, 4, 5, 4, 7, 8, 9] \text{ oder } G''' = [3, 4, 5, 6, 5, 8, 9]$$

Aufgabe 4

a) Die erste Spielerin entfernt den einzigen Strich in G. Der zweite Spieler muss nun den letzten Strich in H entfernen. Da H nach der Misere-Variante gespielt wird, gewinnt die erste Spielerin.

b) Die erste Spielerin entfernt einen Strich in G. Dann bleiben dem zweiten Spieler drei Möglichkeiten:
Entfernt er den verbliebenen einzelnen Strich aus G, dann entfernt die erste Spielerin einen Strich aus H und gewinnt auf diese Weise.
Entfernt er einen einzelnen Strich aus H, so entsteht die Situation aus Teil a), die die erste Spielerin gewinnt.
Entfernt er beide Striche aus H, dann entfernt die erste Spielerin den verbliebenen Strich aus G und gewinnt. Somit kann die erste Spielerin ihren Sieg immer garantieren.

c) Die erste Spielerin entfernt einen Strich im 2er-Stapel von G. Dann hat der zweite Spieler fünf Zugmöglichkeiten:
Entfernt er einen der beiden einzelnen Stapel aus G, dann entfernt sie den einzelnen Strich aus H. Der zweite Spieler kann dann nicht den letzten Strich aus G entfernen, da die erste Spielerin sonst einen Strich aus H entfernt und somit gewinnt. Er kann aber auch nicht in H ziehen, da die erste Spielerin beide Spiele, auf die der zweite Spieler ziehen könnte, gewinnt.
Entfernt er den einzelnen Strich aus H, so entfernt sie den verbleibenden Stapel aus H und gewinnt dann das Spiel G als zweite Spielerin.
Entfernt er den kompletten 2er-Stapel in H, so entfernt sie, analog zum letzten Fall, den verbleibenden Stapel aus H und gewinnt dann das Spiel G als zweite Spielerin.
Entfernt er einen einzelnen Strich vom 2er-Stapel aus H, so entfernt die erste Spielerin einen einzelnen Strich in G. Dann kann der zweite Spieler nicht in G ziehen, da er sonst gezwungen wäre, das verbleibende Spiel H als zweiter Spieler zu verlieren. Er kann aber auch nicht in H ziehen, da dann die Situation aus Teil a) eintritt, die die erste Spielerin gewinnt.

d) Falls alle Stapel die Größe 1 haben, ist der Beweis trivial. Sie zieht zuerst in G und kopiert dann die Züge des zweiten Spielers in der jeweils anderen Komponente, solange dies möglich ist, und gewinnt (Kopieren meint, dass im gleichen Stapel der jeweils anderen Komponente dieselbe Anzahl an Strichen entfernt wird). Existiert pro Spiel nur ein einziger Stapel, führt eine analoge Überlegung zum Sieg der ersten Spielerin. Die anderen Fälle beweisen wir per Induktion über den Aufbau von G und H. Die erste Spielerin entfernt vom größten Stapel S von G genau einen Strich. Nun hat der zweite Spieler drei Möglichkeiten:

Er kopiert den Zug der ersten Spielerin in H:
Dann erhalten wir zwei identische Spiele G' und H'. Das Spiel, welches aus diesen beiden Spielen besteht, gewinnt die erste Spielerin nach Induktionsvoraussetzung.

Er entfernt den kompletten Stapel S in H:
Falls S zu Beginn mehr als zwei Striche hatte, kann sie diesen Zug in G' kopieren, aber einen einzelnen Strich übrig lassen. Wenn der zweite Spieler diesen Strich entfernt, sind beide verbleibenden Spiele wieder identisch und die erste Spielerin gewinnt nach Induktionsvoraussetzung. Entfernt er andere Striche, so kann sie wiederum die Züge kopieren und gewinnt abschließend die Komponente G' und somit das gesamte Spiel.
Falls S zu Beginn genau zwei Striche hatte, wissen wir, dass es keine größeren Stapel gibt. Sollte S der einzige Stapel mit zwei Strichen sein, so existieren nach dem Zug des zweiten Spielers sowohl in G' als auch in H' nur noch Stapel der Größe 1. Insbesondere gibt es in G' einen Stapel mehr. Die erste Spielerin zieht dann in H' und kopiert die Züge des zweiten Spielers in der jeweils anderen Komponente, solange dies möglich ist. Beendet der zweite Spieler das Spiel H', garantiert sie somit, dass noch eine ungerade Anzahl von Stapeln der Größe 1 in G' existiert und sie das Spiel gewinnt. Beendet sie das Spiel H', garantiert sie somit noch eine gerade Anzahl von Stapeln der Größe 1 in G' und gewinnt ebenfalls.
Sollten mehrere Stapel mit zwei Strichen existieren, dann kann die erste Spielerin solange die Züge in anderen Stapeln kopieren, bis die obige Situation eintritt, die sie auf jeden Fall gewinnt.

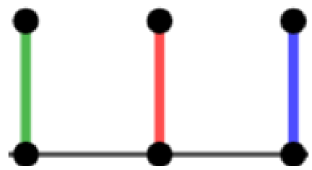
Er zieht an anderer Stelle in G oder H:
Dann kann sie diesen Zug in der jeweiligen anderen Komponente kopieren und es bleiben zwei bis auf einen zusätzlichen Strich in H' identische Spiele übrig. Mit der analogen Taktik wie im zweiten Fall muss nun der zweite Spieler das gesamte Spiel aufgrund des zusätzlichen Strichs in H verlieren.

Aufgabe 5

Es gewinnt immer die Person, die beginnt. Sollte Blau beginnen, so entfernt sie zuerst den linken grünen Strich. Somit ist Rot gezwungen, den zweiten grünen Strich zu entfernen, wodurch er verliert.
Beginnt hingegen Rot, so entfernt er zuerst den rechten grünen Strich. Nun hat Blau nur

noch zwei Optionen. Entweder sie entfernt den grünen Strich, wodurch sie direkt verliert, oder sie entfernt zuerst den verbleibenden blauen Strich. Dann kann Rot einfach einen der übrigen roten Striche entfernen und Blau ist gezwungen, den grünen Strich zu entfernen und zu verlieren.

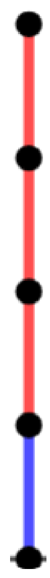
Aufgabe 6



Grün,Rot,Blau

Im Spiel **Grün,Rot,Blau** kann immer die erste Spielerin gewinnen. Dazu entfernt sie zuerst den grünen Strich. Anschließend kann der zweite Spieler nur den Strich der eigenen Farbe entfernen. Danach gewinnt die erste Spielerin durch Entfernen des verbleibenden Strichs.

Aufgabe 7



BlauRotRotRot

Jedes Blau-Rote Hackenbush-Spiel, dass nur aus einem Stapel besteht, der ausschließlich über einen blauen Strich mit der Grundlinie verbunden ist, kann nur von Blau gewonnen werden. Somit wäre das obige Spiel ein passendes.

8.3 zu Kapitel 3

Aufgabe 8

Das Spiel G kann Rot immer gewinnen. Angenommen, Blau beginnt, dann hat Blau nur eine mögliche Option und hinterlässt einen einzelnen roten Strich und Rot gewinnt. Angenommen, Rot beginnt, so kann er den roten Strich über dem blauen entfernen. Blau hat nur eine Option und hinterlässt Rot einen einzelnen roten Strich. Somit gewinnt Rot auch dann.

Um die formale Definition des vorliegenden Spiels notieren zu können, müssen wir zunächst die einzelnen Optionen betrachten. Die einzige Option für Blau ist es, auf ein Spiel zu ziehen, dass nur aus einem roten Strich besteht. Dessen formale Definition kennen wir bereits.

$$\mathbf{Rot} = \{\,\big|\,\{|\}\}$$

Rot seinerseits hat zwei mögliche Optionen. Rot könnte den roten Strich auf dem blauen entfernen und somit auf das Spiel **Blau,Rot** ziehen, oder Rot entfernt den einzelnen roten Strich und zieht auf das Spiel **BlauRot**. Die formale Definition des Spiels **Blau,Rot** kennen wir ebenfalls bereits.

$$\mathbf{Blau{,}Rot} = \{\{|\{|\}\}\,\big|\,\{\{|\}|\}\}$$

Das bedeutet, dass wir uns nun noch das Spiel **BlauRot** genauer anschauen müssen. Offensichtlich haben Blau und Rot jeweils nur eine Möglichkeit. Blau kann nur auf das leere Spiel ziehen, dessen formale Definition wir ebenfalls bereits kennen.

$$0 = \{|\}$$

Rot seinerseits kann nur auf das Spiel **Blau** ziehen, welches wir auch kennen.

$$\mathbf{Blau} = \{\{|\}\,\big|\,\}$$

Somit ist die formale Definition des Spiels **BlauRot**:

$$\mathbf{BlauRot} = \{0\,\big|\,\mathbf{Blau}\} = \{\{|\}\,\big|\,\{\{|\}|\}\}$$

Also ergibt sich für das Spiel G:

$$G = \{\mathbf{Rot}\,\big|\,(\mathbf{Blau{,}Rot}),(\mathbf{BlauRot})\} = \{\{|\{|\}\}\,\big|\,\{\{|\{|\}\}|\{\{|\}|\}\},\{\{|\}|\{\{|\}|\}\}\}$$

Aufgabe 9

Für die disjunkte Summe von G und H benötigen wir zunächst einmal alle Optionen von G und H. Diese sind durch die Aufgabenstellung bereits gegeben. Im Spiel G ist die einzige blaue (und auch rote) Option, auf das leere Spiel zu ziehen. Während im Spiel H Blau immerhin auf das leere Spiel ziehen kann, hat Rot gar keine Option. Damit ergibt sich für die disjunkte Summe zunächst:

$$G + H = \{(0 + \mathbf{Blau}),\ (0 + \mathbf{Grün})\,\big|\,0 + \mathbf{Blau}\}$$

Nun müssen wir noch die hier auftauchenden disjunkten Summen rekursiv untersuchen. Glücklicherweise haben wir zuvor bereits die Identitäten $0 +$ **Blau** $=$ **Blau** und $0 +$ **Grün** $=$ **Grün** gefunden. Somit endet die Rekursion bereits hier und wir können die disjunkte Summe $G + H$ angeben:

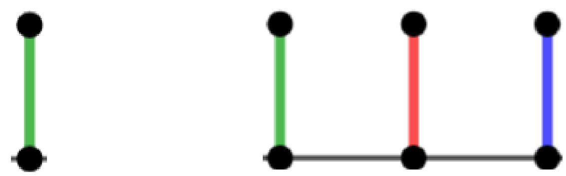
$$G + H = \{(\textbf{Blau}), (\textbf{Grün}) \big| \textbf{Blau}\}$$

Oder in formaler Schreibweise:

$$G + H = \{\{\{|\}|\}, \{\{|\}|\{|\}\} \big| \{\{|\}|\}\}$$

Aufgabe 10

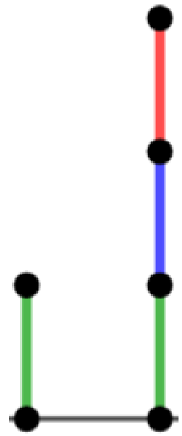
a) Wir zeigen, dass die beiden Spiele $G =$ **Grün** und $H =$ **Grün,Rot,Blau** äquivalent bzgl. $\equiv$ sind.



$G =$ **Grün** $H =$ **Grün,Rot,Blau**

Dazu müssen wir zeigen, dass für alle Spiele X, die wir auf G bzw. H addieren, der Ausgang $o(G + X)$ immer gleich $o(H + X)$ ist. Wir nutzen aus, dass sowohl G als auch H offensichtlich von der ersten Spielerin gewonnen werden.
Angenommen $o(G + X) = B$, dann kann Blau einen Sieg in $G + X$ garantieren, unabhängig davon, ob sie beginnt oder nicht. Dies kann sie dann aber auch in $H + x$, indem sie gemäß ihrer Gewinnstrategie aus $G + X$ spielt, es sei denn Rot entfernt den einzelnen roten Strich aus der Komponente H. Dann reagiert sie, indem sie den einzelnen blauen Strich dort entfernt. Danach fährt sie mit ihrer ursprünglichen Taktik aus $G + X$ fort und gewinnt. Der Fall $o(G + X) = R$ verläuft komplett analog.
Angenommen $o(G + X) = E$, dann kann die erste Spielerin einen Sieg in $G + X$ erzwingen. Dann kann sie dies aber auch in $H + X$ tun, indem sie auch hier gemäß ihrer Gewinnstrategie in $G + X$ spielt, es sei denn der zweite Spieler entfernt den einzelnen Strich seiner Farbe aus der Komponente H. Dann reagiert sie analog zum Fall oben, indem sie den einzelnen Strich ihrer Farbe aus H entfernt und gewinnt somit das Spiel.
Angenommen $o(G + X) = Z$, dann kann der zweite Spieler einen Sieg in $G + X$ erzwingen. Dann kann er dies auch in $H + X$ mit dem gleichen Argument wie oben.

b) Offensichtlich werden beide Spiele G und H von der ersten Spielerin gewonnen. Wenn wir zeigen wollen, dass die beiden Spiele nicht äquivalent sind, müssen wir ein Spiel X finden, sodass $o(G + X) \neq o(H + X)$. Als Spiel X wählen wir das Spiel G. Aus Lemma 3.7 wissen wir, dass $G + G \equiv 0$. Somit genügt es zu zeigen, dass $H + G \not\equiv 0$. Dazu zeigen wir, dass $o(H + G) = B \neq Z = o(0)$.

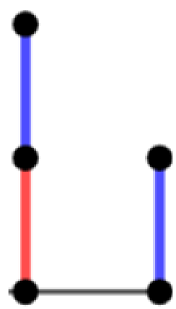


G = **G+H**

Angenommen, Blau beginnt. Dann kann Blau den einzigen blauen Strich entfernen. Der rote Strich fällt und das Spiel $G + G$ bleibt übrig, welches von Blau als zweiter Spielerin gewonnen wird.
Angenommen, Rot beginnt. Dann kann Rot entweder den roten Strich entfernen, dann kann Blau reagieren, indem sie den blauen Strich entfernt, und gewinnt das Spiel $G + G$. Falls Rot einen der grünen Striche entfernt, reagiert Blau, indem sie den anderen grünen Strich entfernt, und gewinnt.
Somit gewinnt Blau unabhängig davon, ob sie beginnt, und es gilt $o(H + G) = B$.

Aufgabe 11

In Hackenbush erhalten wir $-G$ durch Tauschen von Rot und Blau:



In diesem Spiel kann Blau auf **RotBlau** oder **Rot,Blau** ziehen, Rot auf **Blau**. Aus Kapitel 3.1 sind **Rot,Blau=Blau,Rot**$=\{\{|\{|\}\}\big|\{\{|\}|\}\}$ und **Blau**$=\{\{|\}\big|\}$ bereits bekannt. Es muss also noch die formale Notation von **RotBlau** bestimmt werden. In diesem Spiel kann Blau auf das bekannte Spiel **Rot**$=\{\big|\{|\}\}$ ziehen, Rot auf das leere Spiel. Daher muss gelten:

$$\textbf{RotBlau}=\{\{|\{|\}\}\big|\{|\}\}$$

und damit

$$-G=\{\{\{|\{|\}\}|\{|\}\},\{\{|\{|\}\}|\{\{|\}|\}\}\big|\{\{|\}|\}\}$$

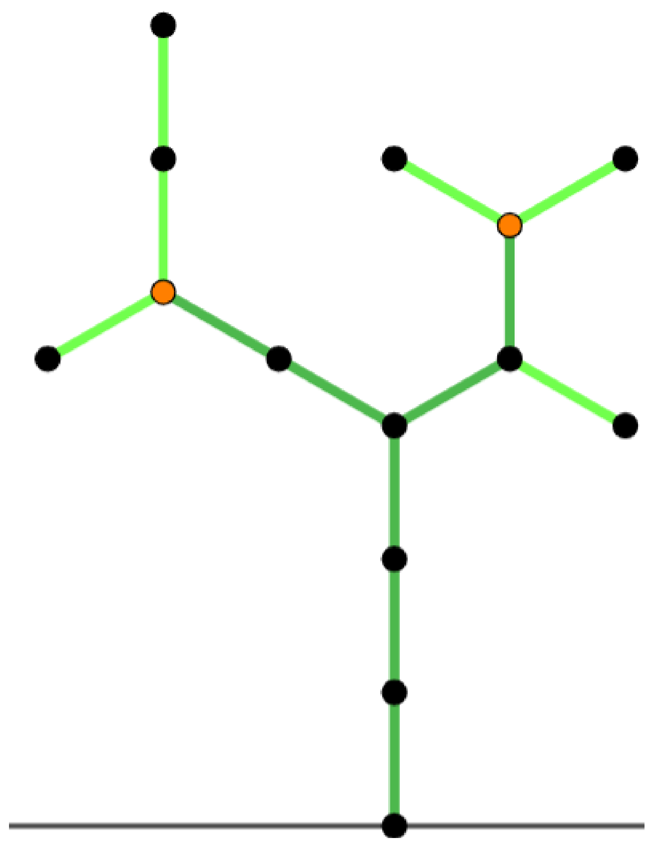
Aufgabe 12

In der Definition des Inversen tauschen Blau und Rot rekursiv die Rollen. Wir tauschen nun schrittweise die Seiten der Optionen, der Optionen der Optionen etc., bis wir zum leeren Spiel gelangen, welches keine zu tauschenden Optionen enthält:

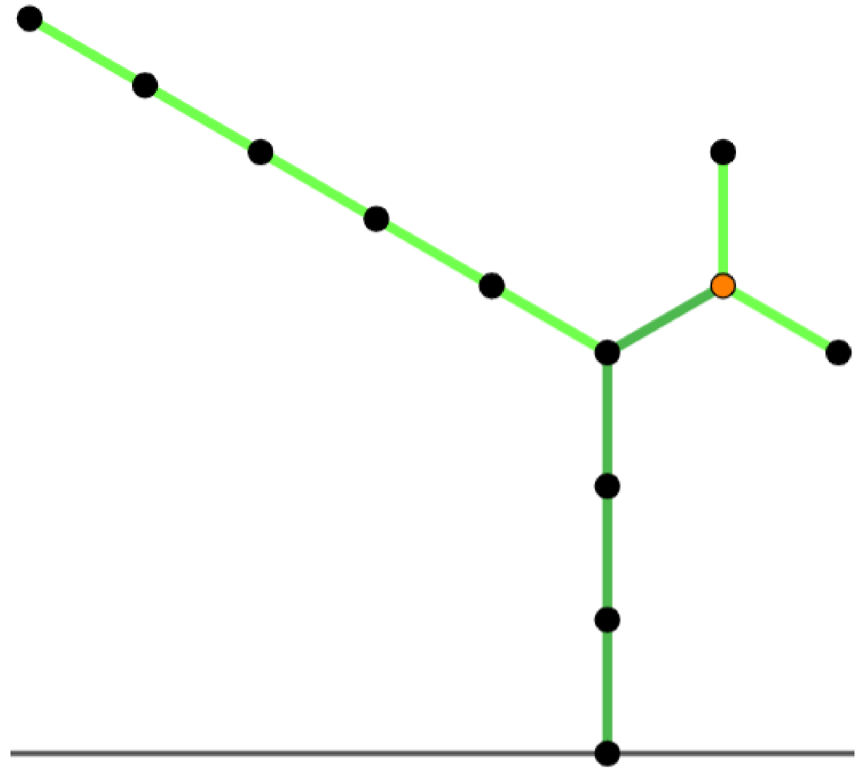
Schritt 1: $\{\{\{\{|\}|\}|\}\Big|\{\{|\{|\}\}|\{\{|\}|\}\}\}$
Schritt 2: $\{\{|\{\{|\}|\}\}\Big|\{\{\{|\}|\}|\{|\{|\}\}\}\}$
Schritt 3: $\{\{|\{|\{|\}\}\}\Big|\{\{|\{|\}\}|\}\}|\}|\}\}\}$

Es gilt: $-G = \{\{|\{|\{|\}\}\}\Big|\{\{|\{|\}\}|\}\}|\}|\}\}\}$

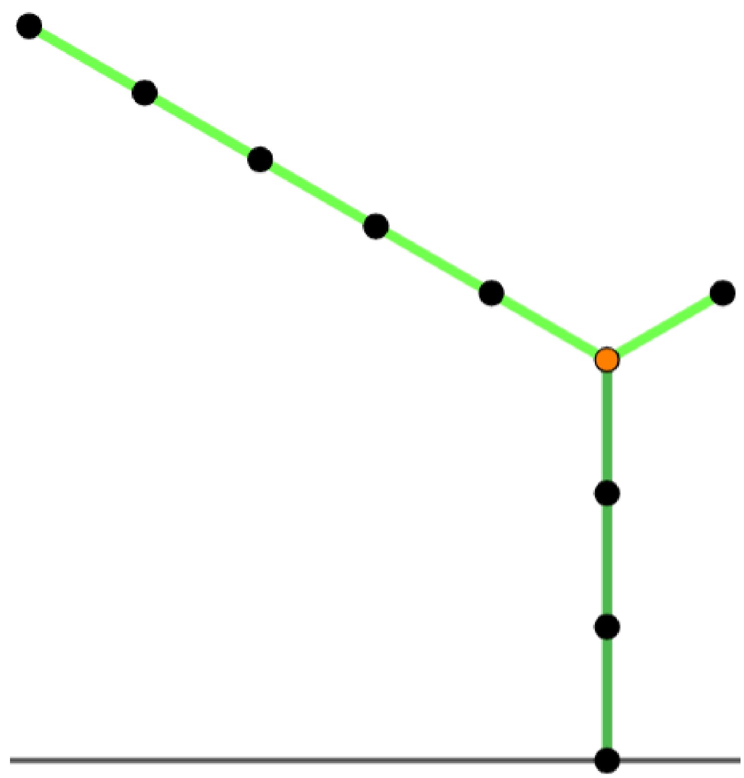
Aufgabe 13



Der ursprüngliche Baum



Die erste Vereinfachung



Die zweite Vereinfachung

Die dritte Vereinfachung

8.4 zu Kapitel 4

Aufgabe 14

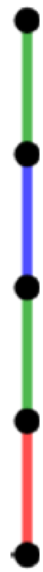
Aus dem Beispiel wissen wir bereits, dass $G \not\lessgtr H$. Wir betrachten nun zunächst die Beziehung von G und J. Nach Lemma 3.13 ist G selbstinvers. Also gilt $J - G = J + G$. Nach Theorem 4.9 wissen wir dann, dass $J \not\lessgtr G$, da das Spiel $J + G$ offensichtlich von der ersten Spielerin gewonnen wird.
Da auch das leere Spiel selbstinvers ist, gilt auch $H - J = H + J = H$. Wir wissen bereits, dass $o(H) = B$. Somit gilt $H \triangleright J$. Wir haben also die Beziehungen:

$$G \not\lessgtr H, G \not\lessgtr J \text{ aber } H \triangleright J$$

Dies mag auf den ersten Blick, wie Einiges in diesem Kapitel, kontraintuitiv erscheinen, da man Transitivität erwarten würde. Diese ist aber auf verschwurbelten Spielen nicht gegeben.

Aufgabe 15

Nach Theorem 4.9 suchen wir ein Spiel G derart, dass $o(H-G)=E$. Wir nutzen dafür aus, dass wir das inverse Spiel zu H durch Farbentausch bereits kennen $-H=$ **BlauGrünRot**. Durch Hinzufügen eines weiteren grünen Strichs auf das Spiel $-H$ erzeugen wir das Spiel $-H*=$ **BlauGrünRotGrün**. Das Spiel $H-H*$ gewinnt die erste Spielerin, da diese den obersten grünen Strich in $-H*$ entfernen kann und dann nach der Spiegelbildstrategie gewinnt. Das bedeutet $-H*$ entspricht unserem Spiel $-G$. Somit gilt für $G=$ **RotGrünBlauGrün**.



$G=$ **RotGrünBlauGrün**

Aufgabe 16

Die Aussage ist falsch. Wir setzen $G=0$, $H=$ **Grün,GrünBlau** und $I=$ **Grün**. Nach Aufgabe 14 wissen wir, dass $G \ntrianglelefteq I$ und $H \ntrianglelefteq I$. Dann ist aber $G+H-I=H-I=H+I$, da I nach Lemma 3.13 selbstinvers ist. Über dieses Spiel wissen wir bereits, dass dort die erste Spielerin einen Sieg erzwingen kann.

Aufgabe 17

Wir notieren die Farbe des unbekannten Strichs im Index von G. Der entsprechende Strich S bekommt diese Farbe ebenfalls im Index notiert.
Behauptung: Zwischen den Spielen gelten immer folgende Beziehungen:

$$G_{blau} \triangleright G_{gruen} \triangleright G_{rot},\ G_{blau} \triangleright G_{leer} \triangleright G_{rot} \text{ sowie } G_{gruen} \ntrianglelefteq G_{leer}.$$

Aus Symmetriegründen reicht es vollkommen zu zeigen, dass $G_{blau} \triangleright G_{gruen}$ (1.), $G_{blau} \triangleright G_{leer}$ (2.) und $G_{gruen} \ntrianglelefteq G_{leer}$ (3.).

Diese drei Aussagen werden wir im Folgenden einzeln zeigen:

1. Die Aussage folgt direkt aus Theorem 4.9, wenn wir zeigen können, dass $o(G_{blau} - G_{gruen}) = B$. Als zweite Spielerin kann Blau einfach durch Anwenden der Spiegelbildstrategie gewinnen. $-G_{gruen}$ ist bis auf einen Strich genau $-G_{blau}$. Sollte Rot diesen grünen Strich S_{gruen} entfernen, so kann Blau den besagten Strich S_{blau} in G_{blau} entfernen. In G_{blau} gibt es keinen Zug, den Blau nicht in der anderen Komponente kopieren kann, da der einzige abweichende Strich blau ist.
Spielt Blau hingegen zuerst, so entfernt sie zuerst den Strich S_{gruen} aus $-G_{gruen}$. Anschließend verwendet sie die Spiegelbildstrategie, solange dies möglich ist. Ist dies nicht möglich, so muss Rot einen Zug in dem Teil von G_{blau} gemacht haben, der zu diesem Zeitpunkt ausschließlich von S_{blau} mit der Grundlinie verbunden ist. In diesem Fall entfernt Blau ebendiesen Strich und fährt mit der Spiegelbildstrategie fort (die Taktik funktioniert analog zu der im Beweis von Lemma 2.7). Die Spiegelbildstrategie muss ab diesem Punkt funktionieren, da der nicht kopierte Zug von Rot in dem Teil von G_{blau} stattgefunden haben muss, der durch den anschließenden Zug von Blau die Verbindung zur Grundlinie verloren hat und somit irrelevant wurde. Blau gewinnt also sowohl als erste als auch als zweite Spielerin. Somit gilt die Aussage.

2. Analog zu 1. gilt zu zeigen, dass $o(G_{blau} - G_{leer}) = B$. Sollte Blau beginnen, so entfernt sie einfach S_{blau} in G_{blau} und gewinnt dann durch die Spiegelbildstrategie.
Beginnt hingegen Rot, so verwendet Blau ebenfalls wie in 1. so lange die Spiegelbildstrategie, wie dies möglich ist. Sobald dies nicht mehr möglich ist, entfernt sie S_{blau} und kehrt analog zum Beweis von 1. zu einer Situation zurück, in der sie die Spiegelbildstrategie wieder verwenden kann. Sie gewinnt somit als erste und als zweite Spielerin. Die Aussage gilt.

3. Nach Theorem 4.9 gilt hier zu zeigen, dass $o(G_{gruen} - G_{leer}) = E$. Eine Gewinnstrategie für die erste Spielerin ergibt sich dadurch, dass sie S_{gruen} in G_{gruen} entfernt und danach die Spiegelbildstrategie verwendet.

Damit sind alle Beziehungen zwischen den möglichen Spielen geklärt.

8.5 zu Kapitel 5

Aufgabe 18

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $G^{B_1} \geqq G^{B_2}$. Wir müssen nun zeigen, dass $G \geqq G'$. Dazu genügt es zu zeigen, dass Blau ihren Sieg als zweite Spielerin in $G - G'$ erzwingen kann. In diesem Fall beginnt Rot. Sollte Rot in G ziehen, so kann Blau durch die Spiegelbildstrategie gewinnen, indem sie diesen Zug in $-G'$ kopiert. Dies ist immer möglich, da in G' nur eine blaue Option ausgetauscht wurde. Die roten Optionen (und damit die blauen Optionen in $-G'$) wurden nicht verändert. Zieht Rot stattdessen in $-G'$ auf eine Option, die nicht $-G^{B_2}$ ist, so kann Blau analog gewinnen. Die einzige noch zu untersuchende Möglichkeit ist daher ein Zug von Rot auf $G - G^{B_2}$. In diesem Fall zieht Blau dann anschließend in G auf G^{B_1}, also insgesamt auf das Spiel $G^{B_1} - G^{B_2}$. Da nach Annahme $G^{B_1} \geqq G^{B_2}$ gilt, muss auch $G^{B_1} - G^{B_2} \geqq 0$ gelten. Somit ist $o(G^{B_1} - G^{B_2})$ Element von $\{B, Z\}$ und Blau kann dort ihren Sieg als zweite Spielerin erzwingen. Also gewinnt sie auf diese Weise auch $G - G'$.

Aufgabe 19

Angenommen, die einzige blaue Option ist ein Zug auf das leere Spiel. In Hackenbush bedeutet das, dass es nur eine Komponente gibt. Diese ist durch einen Strich, den Blau entfernen kann (blau oder grün), mit der Grundlinie verbunden. Alle anderen Striche sind rot, sonst hätte Blau noch weitere Optionen.
Wäre die Verbindung zur Grundlinie grün, so hätte auch Rot die Option, diese zu entfernen und auf das leere Spiel zu ziehen. Sie muss daher blau sein. Das bedeutet, dass es keinen grünen Strich in K_G gibt. Rot kann daher auch nicht auf das Spiel **Grün** ziehen.

Aufgabe 20

Wir betrachten die Optionen von Rot und Blau:

$$G = \{(\textbf{RotGrün}), (\textbf{Blau,Rot}) | (\textbf{Blau}), (\textbf{Blau,Rot})\}$$

Aufgabenteil 1:
Wir können nun ausnutzen, dass **Blau,Rot** $\equiv 0$. Aufgrund der Minimalität des leeren Spiels ist 0 sogar die kanonische Form von **Blau,Rot**. Wir können diese Option also sowohl für Blau als auch für Rot mit Hilfe des Austauschlemmas durch das leere Spiel ersetzen. Dies nutzen wir, um zu zeigen, dass sowohl **RotGrün** unperfekt für Blau, als auch **Blau** unperfekt für Rot ist. Dafür gilt es zu zeigen, dass **RotGrün** $\leqq 0$ und **Blau** $\geqq 0$.
Für Ersteres müssen wir nach Theorem 4.9 nur zeigen, dass $o(\textbf{RotGrün}) \in \{Z, R\}$. Dies ist aber offensichtlich, da Rot immer gewinnen kann.
Für Letzteres müssen wir zeigen, dass **Blau** $\geqq 0$. Dies ist trivial. Somit sind diese beiden Züge unperfekt und wir können das Spiel G durch $K_G = \{0|0\}$ ersetzen. K_G lässt sich nicht weiter vereinfachen und ist somit die kanonische Form von G. Das Spiel K_G lässt sich in Hackenbush als $K_G =$ **Grün** darstellen.

Aufgabenteil 2:
Wir zeigen, dass $o(H) = Z$. Daraus folgt, dass $H \equiv 0$. Mit der Minimalität von 0 folgt dann $K_H = 0 = \{|\}$. Das leere Spiel in Hackenbush entspricht dann dem Spiel, dass keine Striche enthält.

Sollte Blau beginnen, so gibt es drei mögliche Startzüge. Sollte Blau den linken grünen Strich entfernen, so entfernt Rot den grünen Strich rechts oben. Damit kann Rot seinen Sieg als zweiter Spieler garantieren. Sollte Blau zuerst den einzelnen blauen Strich entfernen, so entfernt Rot einen beliebigen grünen Strich und gewinnt ebenfalls. Entfernt Blau zu Beginn den grünen Strich rechts oben, so entfernt Rot den grünen Strich links und gewinnt ebenfalls.
Analoge Überlegungen zeigen, dass auch Blau ihren Sieg als zweite Spielerin garantieren kann.

8.6 zu Kapitel 6

Aufgabe 21

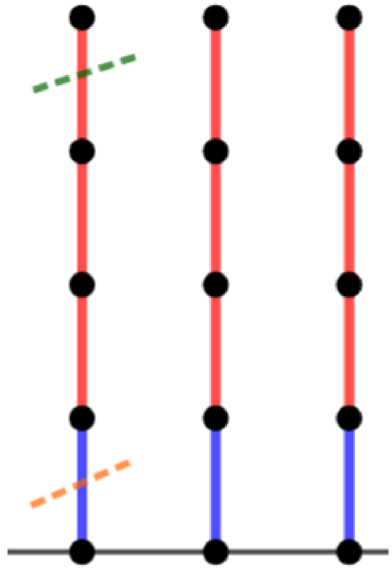
Angenommen, Blau beginnt. Dann kann Blau entweder einen Strich in einer der H-Komponenten entfernen oder den blauen Strich in $-G$. Wenn sie in H zieht, dann fällt die gesamte Komponente und es verbleibt das Spiel $H + (-G)$. Dort reagiert Rot, indem er den obersten roten Strich in H entfernt, und gewinnt nach der Spiegelbildstrategie als zweiter Spieler. Wenn Blau zu Beginn in $-G$ zieht, dann reagiert Rot, indem er einen obersten Strich in einer der H-Komponenten entfernt. Blau muss dann im nächsten Zug eine H-Komponente komplett entfernen. Rot bleibt dann aber noch ein Zug in der verbleibenden H-Komponente, die Blau dann im darauf folgenden Zug entfernen muss. Blau hat nun keine gültigen Züge mehr, während Rot noch den verbliebenen roten Strich aus der ursprünglichen $-G$-Komponente zur Verfügung hat. Somit gewinnt Rot als zweiter Spieler.

Angenommen, Rot beginnt. Wenn Rot zu Beginn in $-G$ zieht, gewinnt Blau automatisch, da Rot keine Verbindungen mehr zur Grundlinie hat. Zieht Rot also in einer der H-Komponenten, kann Blau reagieren, indem sie die andere H-Komponente, in der Rot nicht gezogen hat, komplett entfernt. Rot kann dann nur noch den letzten roten Strich in der verbleibenden H-Komponente entfernen (in $-G$ kann er ja immer noch nicht ziehen, ohne zu verlieren). Dann entfernt Blau ihren Strich aus $-G$ und gewinnt nach der Spiegelbildstrategie.

Also gilt $o(H + H + (-G)) = Z$.

Aufgabe 22

Wir betrachten zuerst die Optionen von $\frac{m}{2^n}$. Die einzige blaue Option ist, auf $(m-1)\frac{1}{2^n}$ zu ziehen. Dies wird klar, da $\frac{1}{2^n} = \{0|\frac{1}{2^{n-1}}\}$ nach Lemma 6.2 gilt und somit Blau in $\frac{1}{2^n}$ die Option hat, auf 0 zu ziehen. Darüber hinaus kann man sich dies auch gut an einem Hackenbush-Spiel mit m Komponenten der Form $\frac{1}{2^n}$ klarmachen. Hier entfernt Blau einen Stapel komplett.



Veranschaulichung der besten ersten Züge von Blau und Rot

Rot seinerseits zieht aus $\frac{1}{2^n} = \{0|\frac{1}{2^{n-1}}\}$ offensichtlich auf $\frac{1}{2^{n-1}}$. Und somit zieht Rot aus $\frac{m}{2^n}$ auf $(m-1)\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}$. In Hackenbush entspricht dies dem Fall, dass Rot zu Beginn einen der obersten roten Striche entfernt.
Somit ergibt sich für das Spiel $\frac{m}{2^n}$:

$$\frac{m}{2^n} = \{(m-1)\frac{1}{2^n}\Big|(m-1)\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\}$$

Nach Lemma 6.2 wissen wir aber auch, dass $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Das heißt dann aber, dass:

$$(m-1)\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = (m-1)\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = (m+1)\frac{1}{2^n}$$

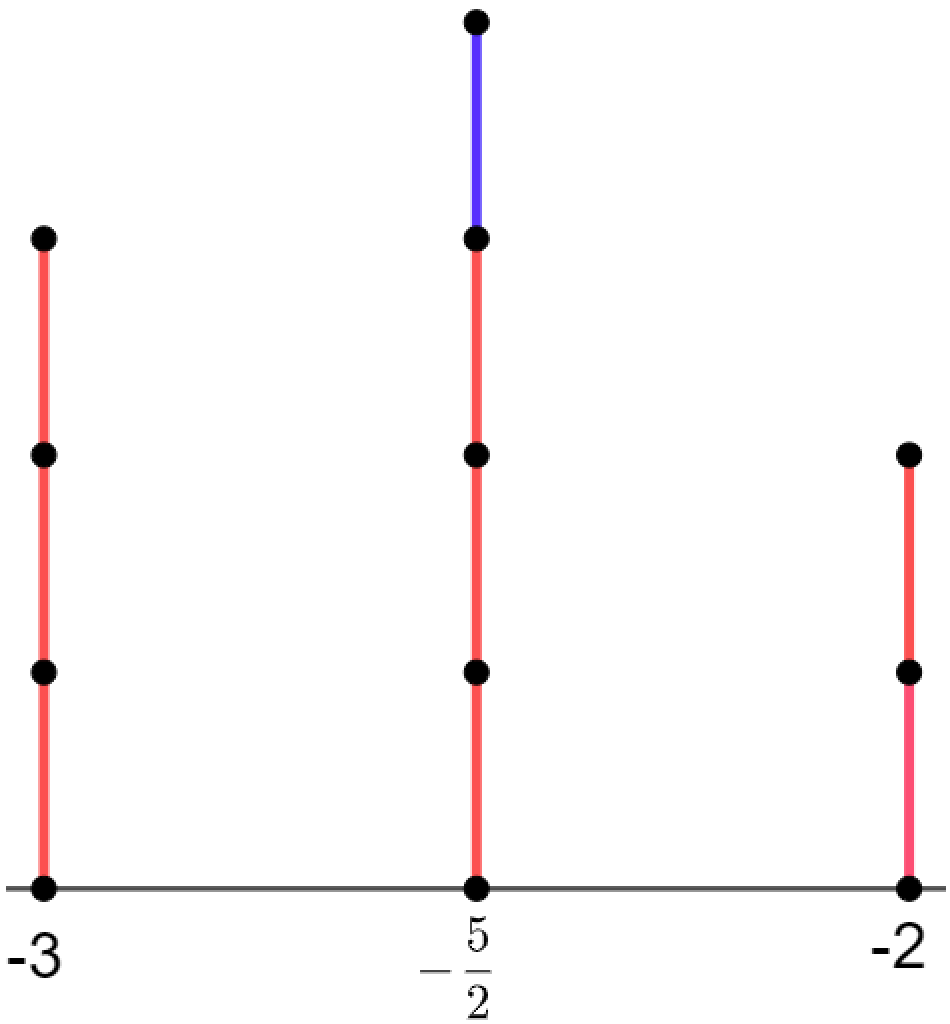
Somit gilt:

$$\frac{m}{2^n} = \{\frac{m-1}{2^n}\Big|\frac{m+1}{2^n}\}$$

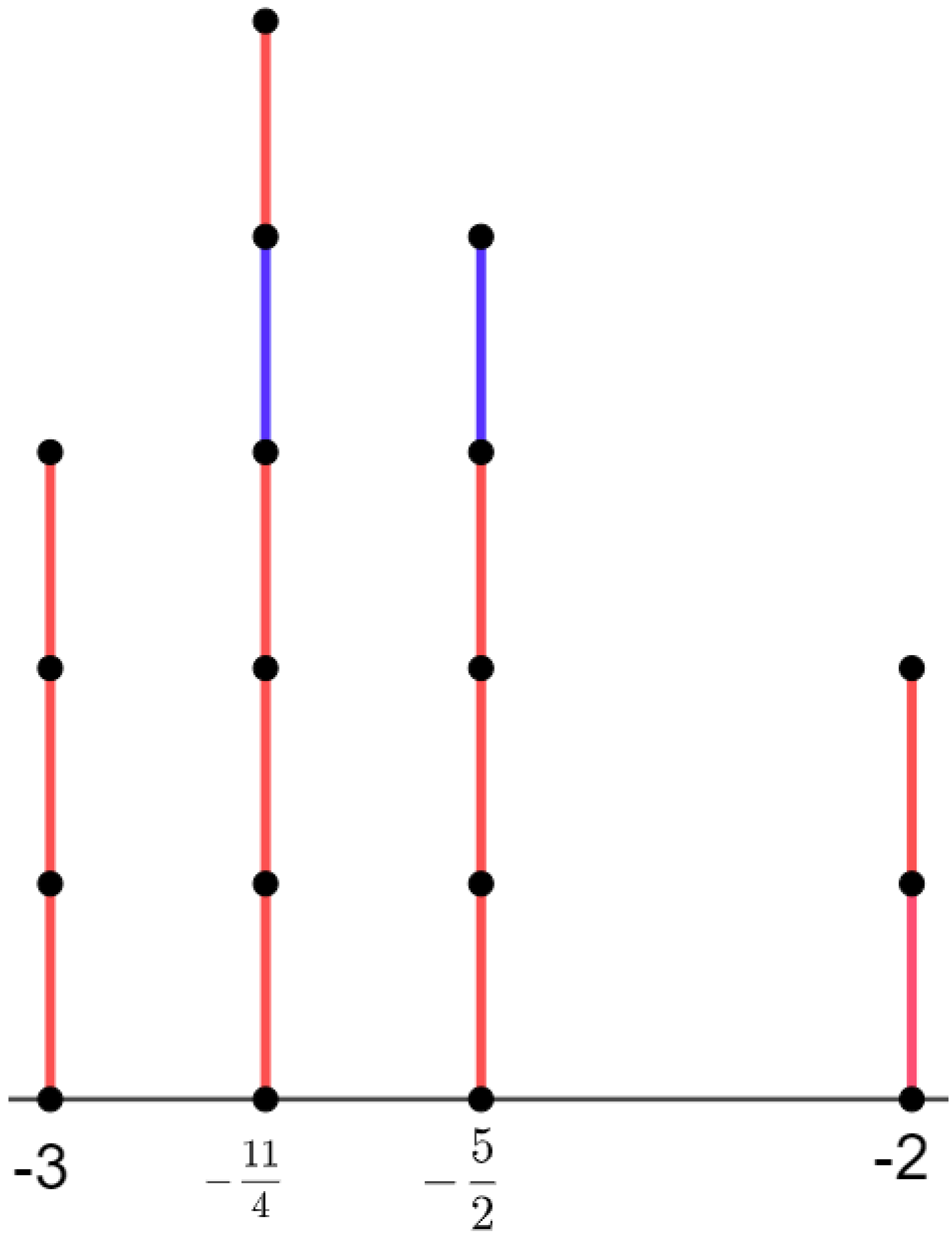
Aufgabe 23

$-\frac{21}{8}$ liegt zwischen den beiden Ganzzahlen -2 und -3. Die Darstellung der -3 sieht in Blau-Rotem Hackenbush wiefolgt aus: -3 = **RotRotRot** und hat somit eine höhere Anzahl an Strichen gegenüner -2 (**RotRot**).

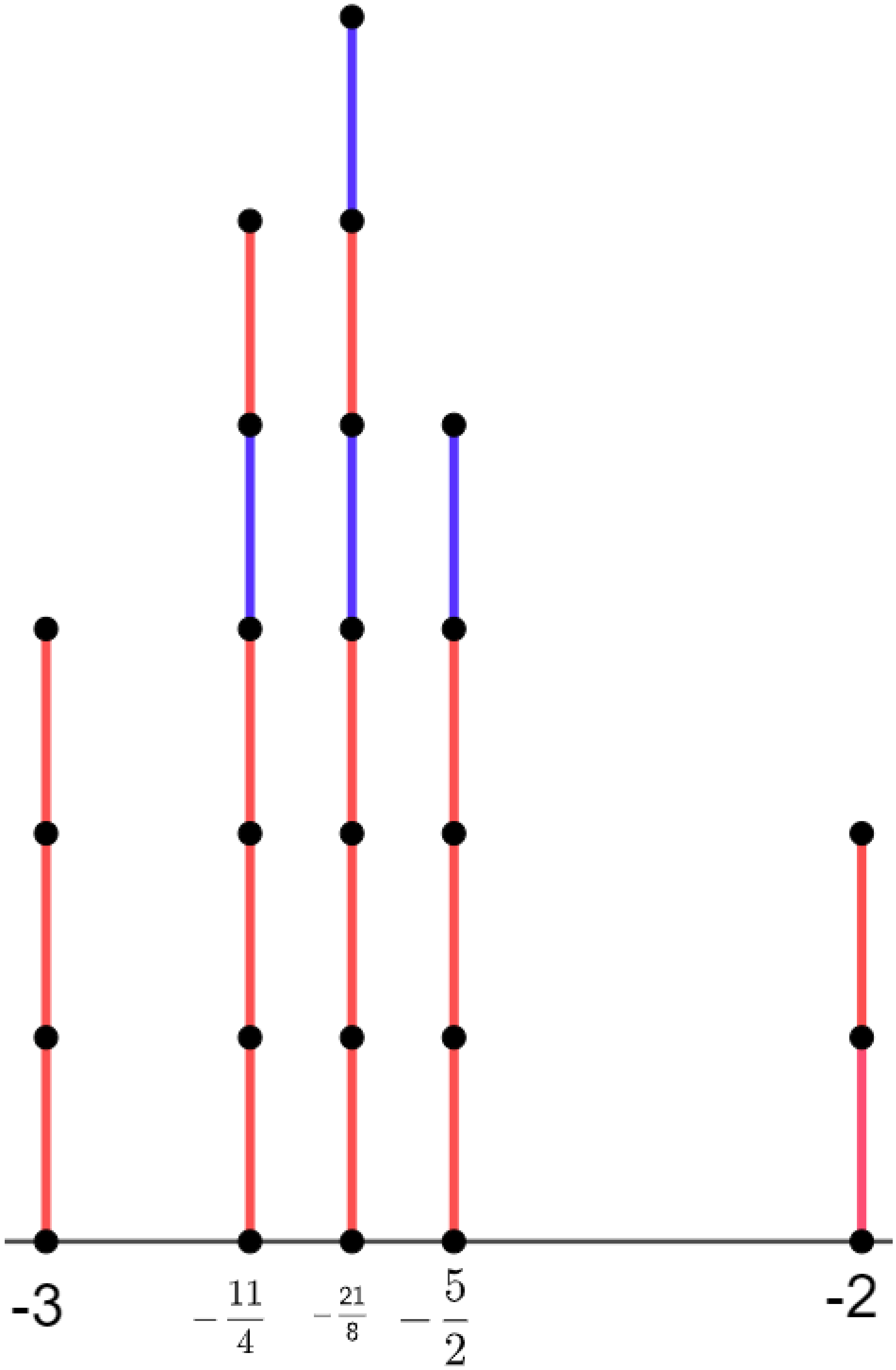
Wir kopieren die Darstellung der -3 in die Mitte und fügen dann einen blauen Strich hinzu, da wir nach rechts kopiert haben. Nun haben wir die Darstellung für $-\frac{5}{2}$ (**RotRotRotBlau**) erzeugt.



$-\frac{21}{8}$ liegt zwischen -3 und $-\frac{5}{2}$. Die Darstellung von $-\frac{5}{2}$ ist länger. Wir kopieren Sie in die Mitte (Bewegung nach links) und fügen dann einen roten Strich hinzu, um die Darstellung von $-\frac{11}{4}$ (**RotRotRotBlauRot**) zu erzeugen.



Abschließend liegt $-\frac{21}{8}$ in der Mitte zwischen $-\frac{5}{2}$ und $-\frac{11}{4}$, wobei $-\frac{11}{4}$ die längere Darstellung hat. Wir kopieren wieder in die Mitte (Bewegung nach rechts) und fügen einen blauen Strich hinzu. Somit ergibt sich für die Darstellung von $-\frac{21}{8}$ = **RotRotRotBlauRotBlau**.



Aufgabe 24

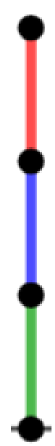
Der Fall $n = 1$ ist trivial. Wir betrachten nun $n > 1$. Da $*$ nach Definition selbstinvers ist, genügt es zu zeigen, dass $\frac{1}{2^n} - * = \frac{1}{2^n} + * \vartriangleright 0$. Dementsprechend genügt es zu zeigen, dass $o(\frac{1}{2^n} + *) = B$. Angenommen, Blau beginnt in $\frac{1}{2^n} + *$. Dann zieht Blau in der Komponente $*$ auf das leere Spiel. Es verbleibt $\frac{1}{2^n} + 0$. Dieses Spiel gewinnt Blau, da $\frac{1}{2^n} \vartriangleright 0$.
Angenommen, Rot beginnt. Dann zieht Rot entweder auf das Spiel $\frac{1}{2^n} + 0$, welches er auf jeden Fall verliert, oder er zieht auf das Spiel $\frac{1}{2^{n-1}} + *$. Dieses kann Blau aber mit der gleichen Taktik wie im ersten Fall gewinnen.
Somit gilt $o(\frac{1}{2^n} + *) = B$ und damit $* \vartriangleleft \frac{1}{2^n}$ für jede natürliche Zahl n. Daraus folgt aber insbesondere, dass $* < x$ für jede positive reelle Zahl x. Mit einem analogen Beweis kann man auch zeigen, dass $* \vartriangleright -\frac{1}{2^n}$.

Aufgabe 25

Die erste Spielerin zieht im Spiel G auf einen Stapel der Länge n und nutzt dann die Spiegelbildstrategie, um ihren Sieg zu erzwingen. Da G und H unparteiische Spiele sind, sind diese nach Lemma 3.13 selbstinvers, also gilt $G + H \equiv G - H$. Da somit $o(G + H) = o(G - H) = E$ folgt mit Theorem 4.9, dass $G \not\geq H$ und damit natürlich auch $G \not\equiv H$.

Aufgabe 26

a) Das Spiel $G =$ **GrünBlauRot** ist semifair.



$G =$ **GrünBlauRot**

Um dies zu beweisen, müssen wir zeigen, dass sowohl Blau als auch Rot in jeder Subposition von G ziehen können. Die erzeugbaren Subpositionen erster Stufe von G sind $G' = 0$, $G'' =$ **Grün** und $G''' =$ **Grün,Blau**. Sowohl Blau als auch Rot haben in jeder nicht leeren Position also jeweils immer mindestens einen gültigen Zug. Auf der zweiten Stufe existieren dann nur noch die Subpositionen 0 und **Grün**. Auch dort können Blau und Rot jeweils in der nicht leeren Subposition ziehen.

b) Es genügt zu zeigen, dass Blau im Spiel $1 - G$ einen Sieg erzwingen kann, unabhängig davon, ob Blau beginnt. Den Beweis führen wir induktiv. Wir können davon ausgehen, dass 1 und $-G$ in kanonischer Form sind. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

Blau zieht zuerst:
Wenn G das leere Spiel ist, ist der Beweis trivial. Wenn G nicht das leere Spiel ist, dann zieht Blau auf eine Option $1 - G^{R_1}$ in $1 - G^R$. Diese muss existieren, da das Spiel G semifair ist. Dabei gilt es, die Definition des inversen Spiels zu beachten. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber insbesondere $1 - G^{R_1} \geqq 0$ und somit kann Blau ihren Sieg in $1 - G^{R_1}$ als zweite Spielerin erzwingen.

Rot zieht zuerst:
Dann hat Rot keinen gültigen Zug in 1. Also kann Rot nur auf eine Option $1 - G^{B_1}$ in $1 - G^B$ ziehen. Da G semifair ist, ist auch G^{B_1} semifair und somit ist nach Induktionsvoraussetzung der Spielwert von G^{B_1} kleiner als 1. Das bedeutet aber nun, dass $1 - G^{B_1} \rhd 0$. Somit kann Blau ihren Sieg in $1 - G^{B_1}$ als nächste Spielerin erzwingen.

Blau gewinnt in beiden Fällen. Somit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 27

Aus Lemma 6.2 wissen wir, dass die kanonische Form von $G = \frac{1}{2} = \{0|1\}$. Da einerseits $0 < 1$ bzw. $0 \lhd 1$ ist, ist die Definition 6.10 für die Subposition G selbst erfüllt. Die einzige weitere Subposition, die wir prüfen müssen, ist die 1. Da aber $1 = \{0|\}$ und somit Rot keine Optionen hat, ist die Definition nicht verletzt. Also ist $G = \frac{1}{2}$ eine Zahl.

Da $H = \uparrow = \{0|*\}$ ist, sehen wir sofort, dass die Definition einer Zahl verletzt ist. Denn wir finden eine blaue Option $H_{B_1} = 0$ und eine rote Option $H_{R_1} = *$, für die $H_{B_1} \lhd H_{R_1}$ nicht erfüllt ist, da $0 \nleqq *$.

Aufgabe 28

Wir zeigen die Aussage induktiv. Wir wissen, dass sowohl x als auch y Zahlen sind. Das bedeutet aber auch, dass jede Option von x und y wiederum eine Zahl ist. Für eine bestimmte blaue Option x^{B_i} und eine bestimmte rote Option x^{R_j} gilt nach Lemma 4.11:

$$x^{B_i} \blacktriangleleft x \blacktriangleleft x^{R_j}$$

Da aber x, x^{B_i} und x^{R_j} Zahlen sind, können x, x^{B_i} und x^{R_j} nicht verschwurbelt sein. Dementsprechend gilt:

$$x^{B_i} \lhd x \lhd x^{R_j}$$

Dann gilt aber auch:

$$x^{B_i} + y \lhd x + y \lhd x^{R_j} + y$$

Analog gilt diese Überlegung natürlich auch für bestimmte blaue und rote Optionen in y. Daraus folgt aber auch direkt nach Induktionsvorausetzung, dass für jede Subposition H von $x + y$ und jede blaue bzw. rote Option die Bedingung $H^{B_i} \lhd H^{R_j}$ erfüllt ist. Somit ist $x + y$ eine Zahl.

Aufgabe 29

a) Wir beginnen mit dem leeren Spiel $G = 0 = \{|\}$. Dieses hat per Definition keinerlei Optionen. Somit ist das leere Spiel gerade, da die Definition von ungerade zusätzlich fordert, dass $G \not\cong 0$.
Das Spiel $1 = \{0|\}$ ist dementsprechend ungerade, da die einzige Option, nämlich das Spiel 0, gerade ist.
Das Spiel $* = \{0|0\}$ ist somit ebenfalls ungerade, da die einzigen Optionen wiederum das Spiel 0 sind, welches gerade ist.
Das Spiel $\frac{1}{2} = \{0|1\}$ ist weder gerade noch ungerade, da es mit dem Spiel 0 eine gerade und dem Spiel 1 eine ungerade Option besitzt.

b) Wir beginnen mit dem Spiel $\uparrow = \{0|*\}$. Unter Verwendung von Aufgabenteil a) ist $\uparrow$ weder gerade noch ungerade, da 0 gerade ist, $*$ aber ungerade.
Die kanonische Form von $*2$ sieht folgendermaßen aus: $*2 = \{0, *|0, *\}$. Somit beinhaltet $*2$ sowohl gerade als auch ungerade Optionen und ist somit selbst weder gerade noch ungerade. Da aber $*2$ in jedem Spiel $*m$ mit $m > 2$ als Option auftaucht, ist $*m$ weder gerade noch ungerade für $m \geq 2$.
Das Spiel $n = \{n - 1|\}$ ist genau dann ungerade, wenn das Spiel $n - 1$ gerade ist. Andersherum ist $n = \{n - 1|\}$ gerade genau dann, wenn $n - 1$ ungerade ist. Da 0 nach Aufgabenteil a) gerade und 1 ungerade ist, geht die Definition von gerade und ungerade auf Spielwerten, die durch natürliche Zahlen repräsentiert werden, mit unserer üblichen Definition von gerade und ungerade auf den natürlichen Zahlen einher.

c) Blau kann im Spiel $1 + *$ entweder auf 1 oder auf $*$ ziehen. Da aber $* \lhd 1$, ist dieser Zug unperfekt und kann für die kanonische Form entfernt werden. Der einzige Zug von Rot ist, auf das Spiel 1 zu ziehen. Somit ergibt sich für die kanonische Form $1 + * = \{1|1\}$. Da die 1 ungerade ist, ist somit das Spiel $1 + *$ gerade.

Aufgabe 30

Wir betrachten zuerst die Menge $A = \{G \in \mathcal{G} | G \text{ ist gerade}\}$. Nach Aufgabe 29 ist das Spiel 0 gerade. Somit ist das neutrale Element von $\mathcal{G}$ in A enthalten. Weiterhin wissen wir nach Lemma 6.19, dass die disjunkte Summe von zwei geraden Spielen wieder gerade ist. Also ist die Abgeschlossenheit bzgl. der Gruppenverknüpfung + gegeben. Zu zeigen bleibt also nur noch, dass falls $G \in A$, dann auch $-G \in A$. Dies folgt aber direkt aus der Definition des Inversen, welche rekursiv die Optionen für Blau und Rot tauscht. Wenn also $G \in A$, dann bedeutet dies, dass alle Optionen von G ungerade sind. Somit sind nach der Definition des Inversen aber auch alle Optionen von $-G$ ungerade. Dann ist aber $-G$ gerade und $-G \in A$.

Betrachten wir nun die Menge $B = \{G \in \mathcal{G} | G \text{ ist gerade oder ungerade}\}$. Es gilt offensichtlich, dass $0 \in B$. Weiterhin folgt die Abgeschlossenheit direkt aus Lemma 6.19. Analog zum ersten Beweis ist auch das inverse Element für ein $G \in B$ ebenfalls in B enthalten.

Aufgabe 31

Wenn Blau als erste Spielerin einen Sieg in $G + H$ erzwingen kann, dann existiert nach dem Satz der Zahlvermeidung 6.20 eine Gewinnstrategie für Blau, bei der sie ihren ersten Zug in G macht. Die einzige blaue Option in G ist, auf das Spiel **Rot** zu ziehen, das in der Äquivalenzklasse -1 liegt. Damit Blau also einen Sieg als zweite Spielerin in $(-1) + H$ erzwingen kann, muss $(-1) + H \geqq 0$ gelten. Da H nach Annahme eine Zahl ist, muss für den Spielwert x von H gelten, dass $x \geqq 1$.

Literaturverzeichnis

1. John H und Guy Richard K Berlekamp, Elwyn R und Conway, ***Gewinnwege für Ihre mathematischen Spiele, Band 4***.

2. Aaron N Siegel, ***Combinatorial game theory***, vol. 146, American Mathematical Soc., 2013.