# Halbeinfache Algebren

Ziel des Seminars ist es, halbeinfache Algebren über Körpern zu studieren. Beispiele sind Matrizenringe oder Schiefkörper wie die Hamiltonschen Quaternionen. Die Klassen von solchen Algebren bilden die Brauergruppe des Körpers, eine wichtige Invariante des Körpers, die man auch mit Hilfe der Galoiskohomologie interpretieren kann. Wir werden die Brauergruppe von $\mathbb{R}$, von endlichen Körpern und von $\mathbb{Q}_p$ bestimmen. Am Schluß soll es um das Theorem von Merkuriev/Suslin gehen, in dem ein Zusammenhang zwischen der Brauergruppe und der Milnor-K-Gruppe hergestellt wird. Grundlage des Seminars soll das Buch von I. Kersten [K] sein; Teile davon sind auch frei im Internet zugänglich, und zwar mit mehr Details, die bei der Vortragsvorbereitung von Nutzen sein können (http://webdoc.sub.gwdg.de/univerlag/2007/brauergruppen.pdf).

**1. Der Satz von Wedderburn**

Algebren und Moduln, Struktursatz von Wedderburn für einfache und halbeinfache Algebren, [K], 1.–3.

**2. Die Brauergruppe eines Körpers**

Das Tensorprodukt, zentrale einfache Algebren, Definition der Brauergruppe, [K], 4.–6.

**3. Zerfällungskörper**

Begriff des Zerfällungskörpers, Satz von Skolem/Noether, Zentralisatorsatz, [K], 7.–8.

**4. Existenz von galoisschen Zerfällungskörpern**

Existenz, Berechnung von $Br(\mathbb{R})$ und von $Br(\mathbb{F}_q)$, [K], 10.–11.

**5. Beziehung zur Galoiskohomologie**

Wiederholung über Galoiskohomologie, einschließlich Hilbert's Satz 90, Beschreibung der (relativen) Brauergruppe in Termin von Galoiskohomologie, [K], 12.–14.

**6*. Die Brauergruppe eines lokalen Körpers**

Zyklische Algebren, Grundlegendes über lokale Körper, Existenz eines zyklischen Zerfällungskörpers, Bestimmung von $Br(K)$, [K], 16. (plus Teile von 11.).

**7. Normrestalgebren**

Definition und Eigenschaften von Normrestalgebren, Beschreibung durch Tripel, [K], 17.

**8. Die Korestriktion $Br(L) \longrightarrow Br(K)$**

Definition der Korestriktion und Eigenschaften, insbes. Projektionsformel (man benutze bekannte Tatsachen aus der Galoiskohomologie), [K], 18.

**9/10. Milnorsche K-Gruppen**

Definition von $K_2$ und Beziehung zur Brauergruppe. höhere K-Gruppen, Definition der Korestriktion für K-Gruppen und andere Funktorialitäten, [K], 20.

**11. Das Normenrestsymbol**

Grundlegende Eigenschaften des Normrestsymbols, [K], 21.–22.

**12*. Das Normrestsymbol für Zahlkörper**

'Wiederholung' über globale Klassenkörpertheorie, Injektivität des $p$-Normrestsymbols für Zahlkörper, [K], 23.

**13./14*. Der Satz von Merkuriev/Suslin**

Aussage und Überblick über den Beweis, [K], 24.–28.

## Literatur


[B] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Algèbre, Chap. 8*, Hermann, Paris, 1958.

[J] J. C. Jantzen, J. Schwermer, *Algebra*, Kap. IX. Springer-Verlag, 2006.

[K] I. Kersten, *Brauergruppen von Körpern*, Vieweg-Verlag, 1990.

[L] F. Lorenz, *Einführung in die Algebra* II, BI-Wissenschaftsverlag, 1990.

[P] A. Pfister, *On the Milnor conjectures: history, influence, applications*. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 102 (2000), no. 1, 15–41.


**Vorbesprechung: Dienstag, 29. Januar, 16.15 Uhr**

**(Raum MZ 0.006)**