Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 14, Abgabe am 08.02.2006

Aufgabe 52

Sei S ein Schema. Zeige, dass man eine in S funktorielle Bijektion

$$\mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(S) = \{\mathscr{F} \subseteq \mathcal{O}_S^{n+1} \text{ lokalfrei vom Rang 1; } \mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F} \text{ lokalfrei}\}$$

hat.

Hinweis: Benutze Aufgabe 51. Ist $\mathscr{F}$ auf S mit den obigen Eigenschaften gegeben, so erhält man lokal auf S Morphismen nach $\mathbb{A}^n \cong U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Zeige, dass diese Morphismen verkleben. Ist andererseits $f\colon S \longrightarrow \mathbb{P}^n$ gegeben, so verklebe die entsprechenden freien $\mathcal{O}_S$-Moduln auf den $f^{-1}(U_i)$.

Aufgabe 53

Zeige, dass der Funktor

$$\mathbf{GL_n}\colon (\mathrm{Sch})^0 \longrightarrow (\mathrm{Sets}), \quad S \mapsto \operatorname{Aut}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^n),$$

durch ein affines Schema GL_n darstellbar ist.

Zeige, dass Morphismen $m\colon GL_n \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} GL_n \longrightarrow GL_n$, $i\colon GL_n \longrightarrow GL_n$, $e\colon \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \longrightarrow GL_n$ existieren, die in dem Sinne die Axiome für Multiplikation, Inverses und neutrales Element einer Gruppe erfüllen, dass die folgenden Diagramme kommutativ sind (beachte: das heißt nicht, dass der zugrundeliegende topologische Raum des Schemas mit einer Gruppenstruktur versehen ist). Wir schreiben zur Abkürzung $G = GL_n$ und $\times$ statt $\times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$.

Assoziativität

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}$$

Neutrales Element

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[rrd, "\mathrm{id}"] & G \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}\times e"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
& & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, equal] \arrow[rrd, "\mathrm{id}"] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \times G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Inverses Element

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \arrow[r, "e"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(i,\mathrm{id})"] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \arrow[r, "e"] & G
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 54

Gib ein nicht noethersches Schema an, dessen topologischer Raum noethersch ist.

Aufgabe 55

Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Es existiere eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_i U_i$, so dass für alle i das Urbild $f^{-1}(U_i)$ affin ist. Zeige: für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq Y$ ist $f^{-1}(U)$ affin.

Hinweis: Zeige zunächst, dass es genügt, den Fall zu betrachten, dass $Y = \operatorname{Spec} A$ affin ist und dass die offenen affinen Teilmengen die Form $U_i = D(g_i)$, $g_i \in A$ haben.

Schreibe $B = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\varphi\colon A \longrightarrow B$ der von f induzierte Homomorphismus. Aus der Vorlesung (Lemma 6.3) wissen wir, dass $f_*\mathcal{O}_X$ quasi-kohärent ist, also gilt

$$\Gamma(f^{-1}(D(g)), \mathcal{O}_X) = (f_*\mathcal{O}_X)(D(g)) = \Gamma(\operatorname{Spec} A, f_*\mathcal{O}_X) \otimes_A A_g = B_{\varphi(g)} \qquad (*)$$

für alle $g \in A$. Wir behaupten nun, dass der von φ induzierte Morphismus $X \longrightarrow \operatorname{Spec} B$ ein Isomorphismus von Y-Schemata ist. Diese Behauptung läßt sich lokal auf Y, d. h. nach Basiswechsel $U_i \longrightarrow Y$ überprüfen. Dann ist gerade zu zeigen, dass die affinen Schemata $f^{-1}(U_i)$ und $\operatorname{Spec} B_{\varphi(g_i)}$ (vermöge des obigen Morphismus) isomorph sind, und das folgt aus $(*)$.