Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 12, Abgabe am 03.07.2007

Aufgabe 45

Sei R ein diskreter Bewertungsring, $X = \operatorname{Spec} R$. Der topologische Raum X besteht aus zwei Punkten. Sei s der dem maximalen Ideal entsprechende abgeschlossene Punkt, und η der generische Punkt. Betrachte den folgenden $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F}(X) = 0, \quad \mathscr{F}(\{\eta\}) = \operatorname{Quot}(R) \ (= \Gamma(\{\eta\}, \mathscr{O}_X))$$

(mit der offensichtlichen Modulstruktur). Ist $\mathscr{F}$ quasi-kohärent?

Aufgabe 46

Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und $f = \operatorname{Spec}(\varphi) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

a) Sei M ein A-Modul. Zeige: $f^*\widetilde{M} \cong \widetilde{M \otimes_A B}$. *Hinweis:* Betrachte zuerst den Fall eines freien Moduls.

b) Sei N ein B-Modul. Zeige: $f_*\widetilde{N} \cong \widetilde{N}$, wobei wir auf der rechten Seite N vermöge φ als A-Modul auffassen. *Hinweis:* Betrachte ausgezeichnete offene Teilmengen.

Aufgabe 47

Sei k ein Körper, $R = k[T_1, \dots, T_n]$ ein Polynomring über k. Zeige: Es gibt keine nicht-trivialen Geradenbündel auf $\mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} R$. (*Hinweis:* Sei allgemeiner R irgendein *faktorieller* Ring. Sei M ein lokalfreier R-Modul vom Rang 1. Dann ist M als R-Modul isomorph zu einem Ideal I von R. Lokal auf $\operatorname{Spec} R$ ist I ein Hauptideal, also ist I selbst ein Hauptideal.)

Aufgabe 48

Sei k ein Körper. Gib einen Isomorphismus $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1_k) \longrightarrow \mathbb{Z}$ an.

Hinweis: Betrachte die Standardüberdeckung $\mathbb{P}^1_k = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cong U_1 \cong \mathbb{A}^1_k$. Sei $V = U_0 \cap U_1 \cong \operatorname{Spec} k[X, X^{-1}]$. Da $\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^1_k) = 0$, entsteht jedes Geradenbündel auf $\mathbb{P}^1_k$ durch "Verkleben" der trivialen Geradenbündel $\mathscr{F} = \mathcal{O}_{U_0}$ und $\mathscr{G} = \mathcal{O}_{U_1}$ via eines Isomorphismus $\mathscr{F}|_V \longrightarrow \mathscr{G}|_V$. Ein solcher Isomorphismus ist durch eine Einheit des Rings $k[X, X^{-1}]$ gegeben ist. Untersuche schließlich, wann zwei Einheiten isomorphe Geradenbündel definieren.