Priv.Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 2, Abgabe am 17.04.2007

Aufgabe 5

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nicht-konstantes Polynom, und sei $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ mit irreduziblen Polynomen f_i, so dass $(f_i) \neq (f_j)$ für alle $i \neq j$. Zeige, dass $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdots f_k)$, und dass die irreduziblen Komponenten von $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ genau die $V(f_i)$, $i = 1, \dots, r$ sind.

Aufgabe 6

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir identifizieren den Raum $M_2(k)$ der 2×2-Matrizen über k mit $\mathbb{A}^4(k)$ (mit Koordinaten A, B, C, D). Darin betrachten wir den Ort aller Matrizen, deren Quadrat verschwindet, also $V(\mathfrak{a})$ mit

$$\mathfrak{a} = (A^2 + BC, D^2 + BC, (A + D)B, (A + D)C).$$

Zeige, dass

$$\mathfrak{a} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{a}} = (AD - BC, A + D),$$

und dass $V(\mathfrak{a})$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^4(k)$ ist (der sogenannte *nilpotente Kegel*).

Aufgabe 7

Welche der folgenden Abbildungen sind stetig (bezüglich der Zariski-Topologie), welche sind Morphismen, welche sind Isomorphismen? Dabei sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) $f_1 \colon \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, $x \mapsto \exp(x)$.

b) $f_2 \colon \mathbb{A}^1(k) \longrightarrow V(X^3 - Y^2) (\subseteq \mathbb{A}^2(k))$, $x \mapsto (x^2, x^3)$.

c) $f_3 \colon V(Y - F(X)) \longrightarrow \mathbb{A}^1(k)$, $(x, y) \mapsto x$. (Es sei $F \in k[X]$; wir betrachten $V(Y - F(X))$ als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^2(k)$.)

d) $f_4 \colon \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, $x \mapsto \begin{cases} x+1 & x \in \mathbb{Q}[i] \\ x & x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}[i] \end{cases}$.

Aufgabe 8

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $\operatorname{char} k \neq 2$. Sei $Z_1 = V(U(T-1) - 1) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$, und sei $Z_2 = V(Y^2 - X^2(X + 1))$. Zeige, dass die Vorschrift $(t, u) \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ einen bijektiven Morphismus $Z_1 \longrightarrow Z_2$ definiert, der jedoch kein Isomorphismus ist.