Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 4, Abgabe am 02.05.2007

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 13

Sei $X = V(T_1^2 - T_1 - T_1T_2T_3 + T_1T_2^2) \subset \mathbb{A}^3(k)$, $Y = \mathbb{A}^1(k)$, und $f\colon X \to Y$ die Einschränkung der Projektion auf die erste Koordinate. Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(y) \subset \mathbb{A}^2(k)$ abgeschlossen, also eine affine algebraische Menge. Für welche y ist sie irreduzibel?

Aufgabe 14

a) Seien I eine Menge, U_i topologische Räume ($i \in I$), $U_{ij} \subseteq U_i$ offene Teilmengen ($i, j \in I$), und $\varphi_{ji}\colon U_{ij} \to U_{ji}$ Homöomorphismen, so dass

1. $U_{ii} = U_i$, $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$
2. *Kozykelbedingung:* $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$, $i, j, k \in I$.

Wir verstehen die Bedingung 2. so, dass insbesondere $\psi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) \subseteq U_{jk}$ für alle i, j, k gefordert wird.

Zeige, dass dann ein topologischer Raum X zusammen mit Abbildungen $\psi_i\colon U_i \to X$ existiert, so dass für alle i die Abbildung ψ_i einen Homöomorphismus von U_i mit einer offenen Teilmenge von X induziert, und dass gilt: $X = \bigcup_i \psi_i(U_i)$, und für alle $i, j \in I$ ist $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$. (Mit anderen Worten: $\psi_j \circ \varphi_{ji} = \psi_i$ auf U_{ij}.)

Zeige ferner, dass X zusammen mit den ψ_i bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

b) Zeige, dass eine entsprechende Aussage für Räume mit Funktionen anstelle von topologischen Räumen gilt. Zeige ferner, dass X eine Prävarietät ist, sofern I endlich, alle U_i Prävarietäten sind, und X zusammenhängend ist.

c) Gib ein Beispiel für Prävarietäten X und Y, eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset X$ und einen Morphismus $U \to Y$, der sich auf verschiedene Arten zu Morphismen $X \to Y$ fortsetzen lässt. (*Hinweis:* Man kann für Y die Prävarietät wählen, die entsteht durch Verkleben von zwei Kopien von $\mathbb{A}^1(k)$ entlang der offenen Teilmengen $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$ (und der Identität auf $\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}$ als Verklebeabbildung).)

d) Zeige anhand eines Beispiels, dass man unendlich viele Prävarietäten wie in b) zu einem zusammenhängenden Raum mit Funktionen verkleben kann, der keine Prävarietät ist.

Aufgabe 15

Zeige, dass für $n \geq 2$ die Prävarietät $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\}$ (eine offene Unterprävarietät von $\mathbb{A}^n(k)$) keine affine Varietät ist. Wie ist es im Fall $n = 1$?

Aufgabe 16

Sei X eine Prävarietät und sei Y eine affine Varietät. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \Gamma(X, \mathcal{O}_X)), \quad f \mapsto f^* \colon \varphi \mapsto \varphi \circ f,$$

eine Bijektion ist.