Prof. Dr. M. Rapoport **WS 2007/08**
Dr. E. Viehmann

Gruppen, Ringe, Moduln
12. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ (wie in Aufgabe 3 von Blatt 6). Zeigen Sie, daß das Ideal $(2, 1 + \sqrt{-5}) \subseteq R$ ein endlich erzeugter flacher R-Modul ist, der nicht frei ist.

Aufgabe 2.

Sei A ein kommutativer Ring und seien M, N zwei A-Moduln. Sei $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Man nennt M^* den zu M dualen Modul.

a) Zeigen Sie, daß es einen Homomorphismus von R-Moduln $\mu : M^* \otimes_A N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ gibt mit $\mu(f \otimes x)(v) = f(v)x$ für alle $f \in M^*$, $x \in N$ und $v \in M$.

b) Zeigen Sie, daß μ ein Isomorphismus ist, falls M frei von endlichem Rang ist. Zeigen Sie an Beispielen, daß keine der beiden Voraussetzungen an M weggelassen werden kann.

Aufgabe 3.

Sei $f : R \to R'$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen. Dann kann man jeden R'-Modul M auch als R-Modul auffassen mit $rm = f(r)m$ für alle $r \in R$ und $m \in M$. Seien M, N zwei R'-Moduln. Zeigen Sie, daß $M \otimes_R N \cong M \otimes_{R'} N$, falls f surjektiv ist.

Insbesondere gilt also für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R, und $R/\mathfrak{a}$-Moduln M, N, daß $M \otimes_{R/\mathfrak{a}} N \cong M \otimes_R N$.

Aufgabe 4.

Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge, das heißt eine Menge I mit einer Partialordnung $\leq$, so daß es zu je zwei Elementen $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Sei R ein Ring. Ein gerichtetes System von R-Moduln mit Indexmenge I besteht aus einem R-Modul M_i für jedes $i \in I$ und einem Homomorphismus $f_{ij} : M_i \to M_j$ für jedes Paar $i, j \in I$ mit $i \leq j$. Die Morphismen f_{ij} sollen dabei $f_{ii} = 1$ und $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ für alle $i \leq j \leq k \in I$ erfüllen.
Sei M ein R-Modul und für jedes $i \in I$ sei $f_i : M_i \to M$ ein Homomorphismus von R-Moduln mit $f_j \circ f_{ij} = f_i$ für alle $i \leq j \in I$. Dann heißt $(M, \{f_i\})$ der Limes des gerichteten Systems, falls die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Ist M' ein R-Modul und sind $f_i' : M_i \to M'$ für $i \in I$ Homomorphismen von R-Moduln mit $f_j' \circ f_{ij} = f_i'$ für alle $i \leq j \in I$, so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi : M \to M'$ mit $\varphi \circ f_i = f_i'$ für alle i. Man schreibt dann

$$M = \varinjlim_i M_i.$$

a) Zeigen Sie, daß jedes gerichtete System $\{M_i, f_{ij} \mid i \leq j \in I\}$ von R-Moduln einen Limes M hat. Definieren Sie dazu M als den Quotienten von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ durch den von

$$\{f_{ij}(x_i) - x_i \mid i \leq j \in I, x_i \in M_i\}$$

erzeugten Untermodul und f_i als die von der Inklusion induzierte Abbildung.

b) Zeigen Sie, daß sich jeder R-Modul M als Limes eines geeigneten gerichteten Systems endlich erzeugter R-Moduln schreiben läßt.

c) Sei N ein R-Modul. Zeigen Sie, daß für jedes gerichtete System von R-Moduln M_i gilt, daß

$$\left(\varinjlim_i M_i\right) \otimes N = \varinjlim_i (M_i \otimes N).$$

Bemerkung: Mit diesen Aussagen kann man die Aussage, daß jeder torsionsfreie Modul über einem Hauptidealring flach ist, auf die entsprechende Aussage für endlich erzeugte Moduln zurückführen. Damit erhält man einen zweiten Beweis dieser Aussage (der besser ist als der in der Vorlesung).

Abgabe: Montag, 21. Januar 2008.