Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei R ein Integritätsbereich und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge mit $1 \in S$.

a) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Zeigen Sie, dass das vom Bild von $\mathfrak{p}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}_{S^{-1}R}$ ein Primideal ist mit

$$\mathfrak{p}_{S^{-1}R} = \{\frac{p}{s};\ p \in \mathfrak{p},\ s \in S\}.$$

b) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von $S^{-1}R$ von dieser Form ist.

c) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion von der Menge der Primideale $\mathfrak{p}$ von R mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ auf die Menge der Primideale von $S^{-1}R$ gibt.

d) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist, falls R ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 2.

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathrm{Jac}(R)$ der Schnitt aller maximalen Ideale von R. Dann heißt $\mathrm{Jac}(R)$ Jacobson-Radikal von R. Zeigen Sie

a) $\mathrm{Jac}(R)$ ist ein Radikalideal, das heißt $\mathrm{Jac}(R) = \sqrt{\mathrm{Jac}(R)}$ (vgl. Aufgabe 1 von Blatt 6).

b) $\mathrm{Jac}(R) = \{r \in R \mid \text{ für alle } s \in R \text{ ist } 1 + rs \in R^\times\}$.

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie, daß $12X^3 - 30X + 21 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad kleiner gleich 4 in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

c) Geben Sie ein Polynom in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ an, das reduzibel ist, aber keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß $X^n - p \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Hinweis: Verfahren Sie analog zum Beweis des Lemmas von Gauß.

Abgabe: Montag, 3. Dezember 2007.

Hinweis: Zur Klausur am 2. Februar 2008 ist zugelassen wer auf den ersten 11 Übungsblättern insgesamt mindestens die Hälfte der möglichen Punkte erreicht hat.