Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

WS 2007/08

Gruppen, Ringe, Moduln

9. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, "j"] \\ U \arrow[r, "u"] & V \arrow[r, "v"] & W \arrow[r, "w"] & X \arrow[r, "x"] & Y \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Es sei f surjektiv und j injektiv und g und i seien Isomorphismen. Zeigen Sie, daß h ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2.

Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind noethersch? (mit Begründung)

a) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Z}[X]$

d) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$

Aufgabe 3.

Sei R ein noetherscher Ring. Zeigen Sie, daß $R[[X]]$ ebenfalls noethersch ist.

Hinweis: Betrachten Sie statt des Ideals in R, das von den höchsten Koeffizienten der Polynome im Ideal $\mathfrak{a} \subset R[X]$ erzeugt wird, das Ideal, das von den niedrigsten Koeffizienten der Potenzreihen im Ideal $\mathfrak{a} \subset R[[X]]$ erzeugt wird.

Aufgabe 4.

Ein direkter Summand eines R-Moduls M ist ein Untermodul N von M so daß es einen Untermodul N' von M gibt mit $N \oplus N' = M$. Sei jetzt $R = \mathbb{Z}$.

a) Sei $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z} \cdot (m, n)$ genau dann ein direkter Summand von $\mathbb{Z}^2$ ist, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

b) Geben Sie zwei direkte Summanden M_1, M_2 von $\mathbb{Z}^2$ an, für die $M_1 + M_2$ kein direkter Summand von $\mathbb{Z}^2$ ist.

Abgabe: Montag, 17. Dezember 2007.