Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Viehmann

Nachklausur zur Vorlesung Gruppen, Ringe, Moduln – Lösung

Aufgabe 1.

a) G enthält 1, π^i $(i = 1, 2, 3)$, $\tau \circ \pi^i$ $(i = 0, \ldots, 3)$. Es gilt $\tau^2 = \pi^4 = 1$ und $\pi\tau = (14)(23) = \tau\pi^3$. Damit sind die oben genannten bereits alle Elemente von G. Die Gruppe S_4 hat $4! = 2^3 \cdot 3$ Elemente, die Gruppe G hat 2^3 Elemente. Damit ist G eine 2-Sylowgruppe von S_4.

b) Die von $(13)(24) = \pi^2$ erzeugte Untergruppe ist normal mit abelschem Quotienten (da der Quotient nur 4 Elemente hat).

Aufgabe 2.

a) $H \cap K$ ist eine Untergruppe von H und K, ihre Ordnung teilt also $\mathrm{ggT}(|H|, |K|) = 1$.

b) Es gilt $[h, k] = (hkh^{-1})k^{-1} \in K$ da K ein Normalteiler ist und ebenso $[h, k] \in H$. Nach a) ist also $hkh^{-1}k^{-1} = 1$.

Aufgabe 3.

a) Ein Element von R ist durch seinen Rest bei Polynomdivision durch $X^3 + 1$ bestimmt. Also hat R so viele Elemente, wie es Polynome vom Grad ≤ 2 gibt, nämlich 8.

b) Es gilt $X^3 + 1 = (X^2 + X + 1)(X + 1)$. Die beiden Faktoren haben keine Nullstelle und sind damit irreduzibel. Nullteiler sind also genau die nichttrivialen Vielfachen der beiden Faktoren. Es gibt $3 = 8/2 - 1$ nichttriviale Vielfache von $X + 1$ und $1 = 8/4 - 1$ Vielfaches von $X^2 + X + 1$, also genau 4 Nullteiler.

c) Der Ring $R/(X^2 + X + 1) = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ ist nullteilerfrei und sogar ein Körper, da $X^2 + X + 1$ irreduzibel ist. Also ist $(X^2 + X + 1)$ ein Primideal. Ein zweites Primideal ist $(X + 1)$, da $R/(X + 1) \cong \mathbb{F}_2$. Da $(X^2 + X + 1)(X + 1) = 0$ in jedem Primideal von R liegt, enthält jedes Primideal mindestens eins dieser beiden Polynome. Da jedes der beiden Polynome bereits ein maximales Ideal erzeugt, sind die oben angegebenen die einzigen Primideale von R.

Aufgabe 4.
Wir zeigen zunächst, daß $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ ein Ideal ist. Sei $r \in R$ und $a, b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$. Dann ist $\varphi(ra+b) = \varphi(r)\varphi(a) + \varphi(b) \in \mathfrak{p}'$, also $ra + b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$.
Seien nun $a, b \in R$ mit $ab \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$. Dann ist $\varphi(a)\varphi(b) \in \mathfrak{p}'$. Da $\mathfrak{p}'$ ein Primideal ist, liegt einer der beiden Faktoren in $\mathfrak{p}'$. Sein Urbild ist dann in $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$. Also ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ ein Primideal.

Aufgabe 5.

a) nicht zyklisch, da die Ordnung der Gruppe 4 ist, aber jedes Element Ordnung höchstens 2 hat.

b) $(\mathbb{F}_{11}^{\times}, \cdot)$ ist zyklisch und z. B. von 2 erzeugt: Die Potenzen von 2 sind: $2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6, 1$.

c) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist zyklisch und zum Beispiel von $(1, 1)$ erzeugt.

d) $\mathbb{Q}$ ist nicht zyklisch: Die von einem Element a/b erzeugte Untergruppe enthält nur Elemente mit Nenner $\leq b$.

Aufgabe 6.
Sei $f : M \to eM \oplus (1-e)M, m \mapsto (em, (1-e)m)$ und $g : eM \oplus (1-e)M \to M, (a, b) \mapsto a + b$. Die beiden Abbildungen sind offensichtlich Modulhomomorphismen und es gilt $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Für $a = ea'$, $b = (1-e)b'$ gilt $f \circ g(a, b) = (e(a+b), (1-e)(a+b)) = (a, b)$ (wegen $e \circ e = e$). Also sind f und g zueinander inverse Isomorphismen. Wir haben gezeigt, daß eM ein direkter Summand von M ist. Da direkte Summanden von flachen Moduln flach sind (vgl. Übung), ist eM also auch flach.