Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

Wintersemester 2011/12

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

04.02.2012

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Papier, Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
erreichbare Punkte	10	12	15	7	16	13	7	80
erreichte Punkte								

Note:

Aufgabe 1: (5+5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasen durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Ker} f$ und $\operatorname{Im} f$.

Aufgabe 2: (6+6 Punkte)
Sei $n \geq 1$ und sei K ein Körper. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$ ein Erzeugendensystem von V, sodass $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\} \backslash \{v_i\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V ist. Zeigen Sie:

(i) Es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in K \backslash \{0\}$, so dass $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i = 0$.

(ii) Seien $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in K$ Elemente mit $\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i v_i = 0$. Dann existiert ein $\gamma \in K$, so dass $\beta_i = \gamma \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ gilt. (Hierbei sind die α_i die Elemente aus Teil (i).)

Aufgabe 3: (5+8+2 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -6 \\ 8 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A über $\mathbb{C}$.

(iii) Ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 4: (7 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $b_2, \ldots, b_n, c_2, \ldots, c_n \in K$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - b_2 c_2 - \cdots - b_n c_n.$$

Aufgabe 5: (6+10 Punkte)
Sei $n \geq 1$ und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f^n = 0$. Zeigen Sie: Genau dann existiert ein Vektor $v \in V$, sodass $v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ eine Basis von V bildet, wenn $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

Aufgabe 6: (7+6 Punkte)

Für eine lineare Abbildung $F : V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen setzen wir $\operatorname{rg} F = \dim \operatorname{Im} F$.

Seien V_1, V_2 und V_3 endlich-dimensionale K-Vektorräume und seien $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim V_2 \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} g,\ \operatorname{rg} f).$$

Aufgabe 7: (7 Punkte[1])

Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und seien $f, g : V \to V$ und $h : V \to W$ lineare Abbildungen. Ferner sei $v_1, \ldots, v_n$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls f trigonalisierbar ist und f^2 diagonalisierbar ist, so ist f diagonalisierbar.

☐ wahr ☐ falsch

$\{\varphi \in V^* \mid \varphi(v_i) = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ ist Unterraum von V^* der Dimension $\dim V - n$.

☐ wahr ☐ falsch

Sind f und g diagonalisierbar, so ist $g \circ f$ diagonalisierbar.

☐ wahr ☐ falsch

Seien $a, b \in K$. Falls $\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ diagonalisierbar ist, so ist $a = 0$.

☐ wahr ☐ falsch

Falls h injektiv ist und $h(v_1), \ldots, h(v_n)$ eine Basis von W, so ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

☐ wahr ☐ falsch

Falls $U \subset V$ ein Komplementärraum zu $\operatorname{Ker} h$ ist, so ist $h|_U$ injektiv.

☐ wahr ☐ falsch

Sei $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{n+1} \rangle \cap \langle v_i \rangle \neq 0.$$

☐ wahr ☐ falsch

[1] Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens 0 Punkte.