Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

Wintersemester 2011/12

Nachklausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I
27.03.2012

Name, Vorname	
Tutor	
Matrikelnr.	
Semester	
E-mail	

Zugelassene Hilfsmittel: Papier, Stift.

Hinweise:

(i) Bitte schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller in blauer oder schwarzer Farbe.

(ii) Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.

(iii) Füllen Sie das Deckblatt bitte vollständig und lesbar aus.

(iv) Benutzen Sie nur Sätze und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungszetteln

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
erreichbare Punkte	10	12	14	9	15	13	7	80
erreichte Punkte								

Note:

Aufgabe 1: (10 Punkte)
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$
Bestimmen Sie die inverse Matrix von A.

Aufgabe 2: (4+4+4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{Q}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Unterraum:
$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Dimension von U und geben Sie Unterräume $W, W' \subset \mathbb{Q}^4$ an (durch Angabe von Basen von W und W'), so dass gilt:

(i) U und W sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,

(ii) U und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$,

(iii) W und W' sind Komplementärräume in $\mathbb{Q}^4$.

Aufgabe 3: (5+3+6 Punkte)
Sei
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(ii) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.

(iii) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4: (9 Punkte)
Sei K ein Körper und sei $a \in K$. Für $n \geq 1$ sei
$$A_n = \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$
Zeigen Sie
$$\det A_n = \sum_{i=0}^{n} a^{2i}.$$

Aufgabe 5: (6+9 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus.

(i) Zeigen Sie, dass f genau dann trigonalisierbar ist, wenn es eine Flagge

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$$

gibt, so dass $f(V_i) \subset V_i$ für $i = 1, \dots, n$.

(ii) Sei $f : V \to V$ trigonalisierbar und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $f(U) \subset U$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_U$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 6: (13 Punkte)
Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $\chi_f(X) = \mu_f(X) = X^n \in K[X]$, wobei χ_f das charakteristische Polynom von f und μ_f das Minimalpolynom von f bezeichnet. Bestimmen Sie alle f-invarianten Unterräume von V, d.h. alle Unterräume $U \subset V$ mit $f(U) \subset U$.

Aufgabe 7: (7 Punkte[1])
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und seien $f, g : V \to V$ und $h : V \to W$ lineare Abbildungen. Es sei χ_f das charakteristische Polynom von f und μ_f das Minimalpolynom von f. Ferner sei $v_1, \dots, v_n$ eine linear unabhängige Teilmenge von V.
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an.

Die Menge $U = \{v \in V \mid f(v) = g(v)\}$ ist ein Untervektorraum von V.
☐ wahr ☐ falsch

Falls $\chi_f = \mu_f$, so sind alle Eigenräume von f eindimensional.
☐ wahr ☐ falsch

Die lineare Abbildung f ist durch $f(v_1), \dots, f(v_n)$ eindeutig bestimmt.
☐ wahr ☐ falsch

Falls $h(v_1), \dots h(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W ist, so ist h surjektiv.
☐ wahr ☐ falsch

Der Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$ hat die Dimension
☐ m ☐ $m + n$ ☐ $m \cdot n$

Die Abbildung f ist diagonalisierbar, falls sie $\dim V$ paarweise verschiedene Eigenwerte hat.
☐ wahr ☐ falsch

Sei $h^* : W^* \to V^*$ die duale Abbildung zu h. Dann gilt $(\operatorname{Ker} h)^* = \operatorname{Ker}(h^*)$.
☐ wahr ☐ falsch

[1] Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens 0 Punkte.