Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Musterlösung zur Probeklausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1:
Das Gaussverfahren liefert (zum Beispiel)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -21 & 6 \\ 0 & 14 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Kerns ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Das Bild von f ist also 2-dimensional. Eine Basis ist z.B. durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Aufgabe 2:
Das Gaussverfahren (mit Spaltenumformungen) liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 15 & -5 \\ -5 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ -5 & -16 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig und v_1, v_2, v_3 ist eine Basis von U. Ein Komplementärraum von U ist z.B.

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 3:

(i) $\chi_A = X^3 - 2X^2 + 2X - 4 = (X-2)(X^2+2) \in \mathbb{Q}[X]$.

(ii) Der einzige rationale Eigenwert von A ist $\lambda = 2$.

(iii) Eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert 2 ist $(1, 1, 0)$.

(iv) Die Matrix A ist weder trigonalisierbar noch diagonalisierbar.

Aufgabe 4:
Subtrahiert man von der i-ten Zeile die letzte Zeile, so ergibt sich:

$$\det\begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der letzten Spalte ergibt

$$= \det\begin{pmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ 0 & 0 & x-a_3 & \dots & a_{n-1}-a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

Aufgabe 5:
(i) Sei $f = c \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $c \in K$ und $0 \neq v \in V$. Dann gilt $f(v) = c \cdot v$. Also ist v Eigenvektor.

Sei umgekehrt jeder Vektor $v \neq 0$ Eigenvektor von f. Wir bezeichnen den zugehörigen Eigenwert mit c_v (also $f(v) = c_v v$) und zeigen, dass $c_v = c_w$ für alle $v, w \neq 0$ gilt. Daraus folgt dann die Behauptung.
Falls v und w linear abhängig sind, so gilt $w = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$ und somit

$$c_w w = f(w) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda c_v v = c_v w.$$

Also $c_v = c_w$, da $w \neq 0$.
Falls v und w linear unabhängig sind, so gilt

$$c_{v+w} v + c_{v+w} w = f(v+w) = f(v) + f(w) = c_v v + c_w w.$$

Es folgt $(c_{v+w} - c_v)v + (c_{v+w} - c_w)w = 0$. Da v und w linear unabhängig sind, gilt $c_v = c_{v+w} = c_w$.

(ii) Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, sodass $f(b_i) = \lambda_i b_i$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Definiere $b_1^*, \dots, b_n^* \in V^*$ durch

$$b_i^* : b_j \longmapsto \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Dann ist $b_1^*, \dots, b_n^*$ eine Basis von V^* (vergleiche Aufgabe 3, Blatt 6). Für diese Basis gilt

$$f^*(b_i) : b_j \longmapsto b_i^*(f(b_j)) = b_i^*(\lambda_j b_j) = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

also $f^*(b_i) = \lambda_i b_i^*$. Demnach ist f^* diagonalisierbar.
Sei umgekehrt f^* diagonalisierbar. Dann ist $f^{**} = (f^*)^* : V^{**} \to V^{**}$ nach dem eben Gezeigten diagonalisierbar. Sei $\Phi : V \to V^{**},\ v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$ der Isomorphismus aus Aufgabe 3, Blatt 6. Dann gilt $\Phi \circ f = f^{**} \circ \Phi$, denn für alle $v \in V$ und $\phi \in V^*$ gilt

$$\Phi(f(v))(\varphi) = \varphi(f(v)) = f^*(\phi)(v) = \Phi(v)(f^*(\varphi)) = f^{**}(\Phi(v))(\varphi).$$

Demnach ist $f = \Phi^{-1} \circ f^{**} \circ \Phi$. Also ist f diagonalisierbar, da f^{**} diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6:

Für $i > 0$ sei $U_i = \operatorname{im} f^i \subset V$ und $U_0 = \operatorname{im} f^0 = \operatorname{im} \mathrm{id}_V = V$. Dann ist $U_i \subset U_{i-1}$ und $f : U_{i-1} \to U_i$ surjektiv.
Sei $i \geq 1$, sodass $U_i \neq 0$ gilt. Wir zeigen durch Widerspruch, dass $\dim U_i < \dim U_{i-1}$ gilt:
Angenommen dies ist nicht der Fall, dann gilt $\dim U_i = \dim U_{i+1}$ (da $U_i \supset U_{i+1}$). Deswegen ist $f|_{U_i} : U_i \to U_{i+1}$ ist eine surjektive Abbildung von Vektorräumen gleicher Dimension, also ein Isomorphismus und insbesondere $U_i = U_{i+1}$. Es folgt, $0 \neq U_i = U_{i+1} = \cdots = U_N = 0$, Widerspruch.

Wir haben gezeigt, dass $\dim U_i \leq \max(0, \dim U_{i-1} - 1)$ gilt, also

$$\dim U_n \leq \max(0, \dim U_{n-1} - 1) \leq \max(0, \dim U_{n-2} - 2) \leq \cdots \leq \max(0, \dim U_0 - n) = 0.$$

Also gilt $\dim U_n = 0$ und somit $f^n = 0$.

Aufgabe 7:

1) wahr
2) falsch
3) wahr
4) falsch
5) wahr
6) falsch