Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Musterlösung zur Nachklausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Es gilt $2u_1 + 3u_2 - u_3 = 0$, die Vektoren sind also linear abhängig. Je 2 der Vektoren sind aber linear unabhängig. Es folgt $\dim U = 2$. Eine Basis ist zum Beispiel durch u_1 und u_2 gegeben.

Sei nun zum Beispiel

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad W' = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

(i) Das Gauß Verfahren (leicht gekürzt) liefert z.B.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren der ersten Matrix sind also linear unabängig. Es folgt $U \oplus W = \mathbb{Q}^4$.

(ii)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind also linear unabhängig. Es folgt $U \oplus W' = \mathbb{Q}^4$.

(iii) Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig. Es folgt $W \oplus W' = \mathbb{Q}^4$.

Aufgabe 3:

(i) $\chi_A = X^3 - X^2 - 2X + 2 = (X-1)(X^2-2)$.

(ii) Der einzige rationale Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 1$. Der zugehörige Eigenraum ist

$$V(A,2) = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(iii) Über $\mathbb{R}$ gibt es zusätzlich die Eigenräume

$$V(A,\sqrt{2}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ und } V(A,-\sqrt{2}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sei S die Matrix, deren Spaltenvektoren aus Eigenvektoren von A bestehen, zum Beispiel:

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2-\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt: $S^{-1}AS = \operatorname{diag}(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Aufgabe 4:

Beweis durch vollständige Induktion:
Für $n = 1$ gilt: $\det A_1 = 1 + a^2$.
Für $n = 2$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{pmatrix} = (1+a^2)^2 - a^2 = 1 + a^2 + a^4.$$

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für $n-1$ und $n-2$. Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt:

$$\det \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$= (1+a^2) \det \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix} - a \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} 1+a^2 & a & \dots & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\det A_n = (1+a^2)\det A_{n-1} - a^2 \det A_{n-2}.$$

Mit der Induktionsvorraussetzung ergibt dies:

$$\begin{aligned}
\det A_n &= (1+a^2)\left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{2i}\right) - a^2\left(\sum_{i=0}^{n-2} a^{2i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} + a^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} a^{2i} - \sum_{i=0}^{n-2} a^{2i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} + a^2 a^{2(n-1)} = \sum_{i=0}^{n} a^{2i}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

(i) Angenommen f ist trigonalisierbar. Dann gibt es eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$, so dass die Matrix $c_B^B(f)$ von f in dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist, oder mit anderen Worten: es gibt $a_{ij} \in K$, so dass

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} b_j. \tag{1}$$

Sei nun $V_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ der Untervektorraum, der von den ersten i Basisvektoren erzeugt wird. Dann gilt:

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V.$$

Ferner folgt aus (1), dass $f(b_j) \in V_i$ für alle $j \leq i$ gilt. Folglich gilt $f(V_i) \subset V_i$.

Sei umgekehrt

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$$

eine vollständige Flagge von f-invarianten Unterräumen. Dann gilt $\dim V_i = i$, da $\dim V_n = n$ und $\dim V_{i+1} > \dim V_i$.

Wir wählen einen Basisvektor b_1 von V_1 und ergänzen sukzessive die Basis $b_1, \dots, b_i$ von V_i zu einer Basis $b_1, \dots, b_i, b_{i+1}$ von V_{i+1}. Dies liefert eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $V_n = V$, so dass $V_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$. Da $f(V_i) \subset V_i$, existieren $a_{ij} \in K$, so dass

$$f(b_i) = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} b_j$$

gilt. Mit anderen Worten: Die Matrix $c_B^B(f)$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

(ii) Da f trigonalisierbar ist, gibt es eine vollständige Flagge

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subsetneq V_n = V$$

von f-invarianten Unterräumen. Setzen wir $U_i = U \cap V_i$, so gilt $f(U_i) \subset U_i$, da $f(U) \subset U$ und $f(V_i) \subset V_i$. Ferner ist $U_i \subset U_{i+1}$ und $\dim U_i \leq \dim U_{i+1} \leq \dim U_i + 1$. Ausserdem gilt $U_0 = 0$ und $U_n = U$. Sei $d = \dim U$, dann gibt es für $i \in \{1, \dots, d\}$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\dim U_j = i$ und wir setzen $U'_i = U_j$. Dann ist

$$0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d = U$$

eine vollständige Flagge von f-invarianten Unterräumen in U. Nach Teil (i) folgt, dass $f|_U$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 6:

Aus $\chi_f = \mu_f = X^n$ folgt $f^n = 0$ und $f^{n-1} \neq 0$. Insbesondere ist f nilpotent und $\operatorname{Ker} f^{n-1} \neq V$. Wir betrachten die Kette der Kerne

$$0 \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^{n-1} \subset \operatorname{Ker} f^n = V.$$

Da $\operatorname{Ker} f^{n-1} \neq V$ folgt (wie in der Probeklausur und der Klausur), dass alle Inklusionen echte Inklusionen sind und insbesondere $\dim \operatorname{Ker} f^i = i$.

Es ist offensichtlich, dass die Unterräume $\operatorname{Ker} f^i$ alle f-invariant sind. Sei $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum der Dimension i. Wir zeigen, dass dann schon $U = \operatorname{Ker} f^i$ gilt. Da f nilpotent ist, ist auch die Einschränkung $f|_U$ nilpotent. Wegen $\dim U = i$, gilt dann schon $f^i|_U = 0$, also $U \subset \operatorname{Ker} f^i$. Andererseits gilt $\dim U = i = \dim \operatorname{Ker} f^i$. Es folgt $U = \operatorname{Ker} f^i$.

Aufgabe 7:

1) wahr

2) wahr

3) falsch

4) wahr

5) $m \cdot n$

6) wahr

7) falsch