Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann
WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 10

Abgabe 23.12.2011

Aufgabe 1:
Berechne die Determinante von den folgenden Matrizen:

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

(iii) Sei K ein Körper, und seien $a, b \in K$.
$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

Aufgabe 2:

(i) Berechne die Determinante der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$
und stelle sie als Quadrat einer Zahl in $\mathbb{Q}$ dar, die von den Variablen a, b, c, d, e und f abhängt.

(ii) Sei $A \in M_{2n+1}(\mathbb{Q})$ eine schiefsymmetrische Matrix, das heißt ${}^tA = -A$. Zeige: $\det A = 0$.

(iii) Zeige, dass die Spiegelung an der Nebendiagonalen die Determinante nicht ändert, das heißt:
$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{nn} & a_{n-1,n} & \dots & a_{1n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n-1,1} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:
Betrachte die folgenden Matrizen in $M_2(\mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = -E, \qquad L = -I, \qquad M = -J, \qquad N = -K.$$

(i) Berechne alle 64 Produkte von je 2 Elementen der Menge $G = \{E, F, I, J, K, L, M, N\}$. Bestimme dabei IJ, JI, I^2 und J^2 durch explizite Matrizenmultiplikationen, die übrigen Produkte durch Anwenden der Rechenregeln für Matrizen. Fasse das Ergebnis in Tabellenform zusammen und begründe, warum G eine Gruppe ist.

(ii) Zeige, dass G nicht zu der achtelementigen Gruppe

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

isomorph ist.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper und seien $x, a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} x & & & & & -a_0 \\ -1 & x & & & & -a_1 \\ & -1 & x & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & x & -a_{n-2} \\ & & & & -1 & x - a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Berechne $\det A$.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`