Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12 [1]

Aufgabe 1:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 0 \\ 44 & 11 & 4 \\ -12 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechne A^{12345}.

Aufgabe 2:
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g : V \to V$ diagonalisierbare Endomorphismen mit $f \circ g = g \circ f$.

(i) Sei $U \subset V$ ein Unterraum, so dass $g(U) \subset U$ gilt. Zeige, dass die Einschränkung von g auf U ein diagonalisierbarer Endomorphismus von U ist.

(ii) Zeige, dass f und g simultan diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Basis B von V, so dass $c^B_B(f)$ und $c^B_B(g)$ Diagonalgestalt haben.

Aufgabe 3:

(i) Für welche Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -b & d \\ 1 & -a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

(ii) Für $a_0, \dots a_{n-1} \in \mathbb{C}$ betrachte die folgende Matrix in $M_n(\mathbb{C})$:

$$B_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von B_n und zeige, dass B_n diagonalisierbar ist.

(Hinweis: Versuche Eigenvektoren der Form $(\zeta^{i_1}, \dots, \zeta^{i_n})$ mit $i_j \geq 0$ und $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ zu finden.)

Aufgabe 4: Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $\chi_A \in K[X]$ das charakteristische Polynom von A. Zeige:

(i) $(-X)^n \chi_A(X^{-1}) = \det(A)\ \chi_{A^{-1}}(X)$.

(ii) Sei $A \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{Q})$ ähnlich zu A^{-1}. Dann ist $\det A \in \{\pm 1\}$ und $\det A$ ist ein Eigenwert von A.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`

[1] Dieses Blatt ist für die Klausurzulassung nicht mehr relevant