Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann
WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 2

Abgabe 28.10.2011

Aufgabe 1:

(i) Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & + & 3y & & & - & u & + & v & = 6 \\ x & - & y & + & z & - & 2u & + & v & = 3 \\ & - & y & + & z & & & - & v & = 0 \\ 4x & + & y & + & 2z & - & 5u & + & 3v & = 12. \end{array}$$

(ii) Zeige, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & & & = & 3 \\ 7x & + & 2y & + & 6z & = & 4 \end{array}$$

keine Lösung besitzt. Beschreibe den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Systems.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper, sowie $a, b \in K$. Zeige, dass

(i) $-(-a) = a$,

(ii) $(-a)b = -ab = a(-b)$,

(iii) $(-a)(-b) = ab$,

(iv) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, falls $a \neq 0$.

Aufgabe 3:

Sei $F = \{0, 1, a, b\}$ eine vierelementige Menge. Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt, auf F die Struktur eines Körpers zu erklären, so dass 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist. Stelle dazu Verknüpfungstabellen auf.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und $U, V \subset K^n$ Untervektorräume. Es sei

$$\begin{aligned} U \cap V = {} & \{x \in K^n \mid x \in U \text{ und } x \in V\}, \\ U \cup V = {} & \{x \in K^n \mid x \in U \text{ oder } x \in V\}, \\ U + V = {} & \{x \in K^n \mid \text{es existieren } u \in U \text{ und } v \in V, \text{ mit } x = u + v\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass

(i) die Mengen $U \cap V$ und $U + V$ Unterräume des K^n sind.

(ii) die Menge $U \cup V$ genau dann ein Unterraum des K^n ist, wenn $U \subset V$ oder $V \subset U$ gilt.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`