Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 6

Abgabe 25.11.2011

Aufgabe 1:
Die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ werde bezüglich der Standardbasen durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 & 2 \\ 5 & 4 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Durch welche Matrix wird f bezüglich der durchnummerierten Basen

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; d_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; d_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^4$ und

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{Q}^3$ beschrieben?

Aufgabe 2:
Sei V ein zwei-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei a_1, a_2 eine Basis von V. Betrachte die Vektoren

$$b_1 = a_1, \; b_2 = -\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}a_2, \; b_3 = -\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}a_2$$

aus V.

(i) Zeige, dass b_1, b_2 eine Basis von V ist. Stelle b_3 als Linearkombination von b_1 und b_2 dar.

(ii) Die linearen Abbildungen $f, g : V \to V$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2 & \qquad g(b_1) &= b_2 \\ f(b_2) &= b_1 & \qquad g(b_2) &= b_3. \end{aligned}$$

Bestimme $f(b_3)$ und $g(b_3)$.

(iii) Berechne die Matrizen

$$c_A^A(f), \; c_A^A(g), \; c_A^A(f \circ g), \; c_B^B(f), \; c_B^B(g), \; c_B^B(f \circ g), \; c_B^B(g \circ f)$$

bezüglich der durchnummerierten Basen $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$.

Aufgabe 3:
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ der Dualraum von V. Zeige:

(i) Bilden die Elemente $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, so sind die Elemente $\ell_1, \dots, \ell_d \in V^*$, die durch

$$\ell_i(b_j) = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^*.

(ii) Die Abbildung $\Phi : V \to (V^*)^*,\ x \mapsto \ell_x$ mit $\ell_x(f) = f(x)$ für alle $f \in V^*$ ist ein Isomorphismus.

Sei nun $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Wir definieren die Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ durch $f^*(\ell) = \ell \circ f$ für $\ell \in W^*$.

(iii) Zeige, dass f^* eine lineare Abbildung ist.

(iv) Zeige, dass f^* genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist, und f^* genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper und

$$W = K^{\mathbb{N}} = \{\underline{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in K\} \text{ sowie}$$
$$V = K^{(\mathbb{N})} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in W \mid a_i = 0 \text{ für fast alle } i\}.$$

(i) Für $\underline{a} \in W$ sei $f_{\underline{a}} : V \to K$ gegeben durch

$$f_{\underline{a}} : \underline{b} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{i\geq 1} a_i b_i.$$

Zeige, dass die Abbildung $\Psi : W \to V^*,\ \underline{a} \mapsto f_{\underline{a}}$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Zeige dass die Abbildung $\Phi : V \to (V^*)^*$ aus Aufgabe 3 (ii) injektiv aber nicht surjektiv ist.

Anleitung: Betrachte die Komposition $\tilde{\Psi} = \Psi^* \circ \Phi : V \to W^*$ und zeige, dass eine Abbildung $g : W \to K$ im Bild von $\tilde{\Psi}$ bereits eindeutig durch die Einschränkung $g|_V$ bestimmt ist. Anschließend darf benutzt werden, dass eine Basis von V zu einer Basis von W ergänzt werden kann.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`