Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 8

Abgabe 9.12.2011

Aufgabe 1:
Sei K ein Körper und seien A und B zwei ähnliche $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K.

(i) Zeige, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ die Matrizen A^j und B^j ähnlich zueinander sind. Insbesondere ist $\operatorname{Spur} A^j = \operatorname{Spur} B^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei $c \in K$ beliebig. Dann ist $A - cE_n$ ähnlich zu $B - cE_n$, insbesondere gilt

$$\operatorname{rg}(A - cE_n) = \operatorname{rg}(B - cE_n).$$

Betrachte nun die folgenden 3×3-Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(iii) A ist nicht ähnlich zu B und C ist nicht ähnlich zu D.

(iv) Die Matrizen C und D sind äquivalent.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und $n \geq 1$.

(i) Zeige, dass für alle $i \neq j$ die Elementarmatrix $T_{ij}(1) \in M_n(K)$ nicht zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.

(ii) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$. Zeige, dass die zwei Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ genau dann ähnlich sind, wenn es eine Permutation $\sigma \in S_n$ gibt, so dass $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ für alle i.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und $n \geq 1$. Für $1 \leq r, s \leq n$ definiere $n \times n$-Matrizen $E_{rs} = (\epsilon_{ij})$ durch

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ für } (i,j) \neq (r,s) \\ 1 & , \text{ für } (i,j) = (r,s). \end{cases}$$

(i) Zeige, dass

$$E_{rs}E_{tu} = \begin{cases} E_{ru} & , \text{ falls } s = t \\ 0 & , \text{ falls } s \neq t \end{cases}$$

(ii) Schreibe für $r \neq s$ die Matrizen E_{rs} und $E_{rr} - E_{ss}$ in der Form $AB - BA$ für $n \times n$-Matrizen A und B.

(iii) Sei $L : M_n(K) \to K$ eine lineare Abbildung, so dass $L(AB) = L(BA)$ für alle $A, B \in M_n(K)$. Zeige, dass ein $c \in K$ gibt, so dass $L(A) = c\,\mathrm{Spur}(A)$ für alle $A \in M_n(K)$.

(iv) Zeige, dass sich die Einheitsmatrix $E_n \in M_n(\mathbb{Q})$ nicht in der Form $AB - BA$ mit $A, B \in M_n(\mathbb{Q})$ darstellen läßt. Zeige anhand eines Beispiels, dass dies für einen beliebigen Körper K im allgemeinen nicht richtig ist.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper.

(i) Stelle $A = \mathrm{diag}(a, a^{-1})$ für $a \in K$ als Produkt von Elementarmatrizen dar und folgere, dass A in $\mathrm{SL}_2(K)$ liegt.

(ii) Stelle in den folgenden Fällen die Elementarmatrix $T_{ij}(b)$ für $b \in K$ in der Form $ABA^{-1}B^{-1}$ mit $A, B \in \mathrm{SL}_n(K)$ dar:

  (a) $n = 2$ und K hat mindestens 4 Elemente,
  (b) $n = 3$ und K beliebig,
  (c) $n > 3$ und K beliebig.

(iii) Sei G eine kommutative Gruppe und sei $\varphi : \mathrm{GL}_n(K) \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige: wenn eine der Vorraussetzungen (a), (b) oder (c) aus (ii) erfüllt ist, dann gilt $\varphi(A) = e$ für alle $A \in \mathrm{SL}_n(K)$. Hierbei bezeichne e das neutrale Element von G.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`