Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 7

Abgabe 25.05.2012

Aufgabe 1:
Berechne die Polarzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2:
Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und sei $A = PT$ die Polarzerlegung von A. Sei $A = T_1 D T_2$ eine Cartan-Zerlegung von A mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Zeige, dass die λ_i genau die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von P sind. Somit ist D bis auf Vertauschen der Einträge eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3:
Sei V ein unitärer Vektorraum und f ein normaler Endomorphismus. Sei f^* die adjungierte Abbildung zu f. Zeige:

(i) Es gilt $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^*$.

(ii) Es gilt $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^*$.

(iii) Sei g ein weiterer normaler Endomorphismus von V. Dann gilt $f \circ g = 0$ genau dann, wenn $g \circ f = 0$.

Aufgabe 4:
Sei $n \geq 1$. Zeige, dass für $A \in M_n(\mathbb{R})$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(ii) Es gibt eine symmetrische positiv definite Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit ${}^tA = SAS^{-1}$.

(iii) Es gibt ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so dass A bezüglich dieses Skalarproduktes selbstadjungiert ist.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`