7. Übungsblatt

Lösungsskizze zu Aufgabe 3

Aufgabe 3:
Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Zeige, dass der Polynomring $A[X]$ ganzabgeschlossen ist.

Tip: Reduziere auf den Fall, dass A ein Körper ist.

Sei K der Quotientenkörper von A. Es genügt die folgenden Behauptungen zu zeigen.
i) $K[X]$ ist ganzabgeschlossen in $K(X)$;
ii) $A[X]$ ist ganzabgeschlossen in $K[X]$.

Zu i): Dies folgt, weil $K[X]$ faktoriell ist (siehe Vorlesung).

Zu ii): Setze $S = K[X]$ und $R = A[X]$. Für einen R-Untermodul M von S bezeichne $\mathrm{Koef}(M)$ den A-Untermodul von K, der von den Koeffizienten der Polynome aus M erzeugt wird. Nun sei $h \in S$ ganz über R, und sei $M = R[h]$ die R-Unteralgebra von S, die von h erzeugt wird. Wir fassen M als einen R-Untermodul von S auf. Weil h ganz ist, existiert ein $n \geq 0$ mit

$$\langle 1, h, h^2, \ldots, h^n \rangle_R \;=\; M$$

als R-Untermoduln von S. Es folgt, dass

$$\sum_{i=0,\ldots,n} \mathrm{Koef}(\langle h^i \rangle_R) \;=\; \mathrm{Koef}(M).$$

Also ist $\mathrm{Koef}(M)$ ein endlich erzeugter A-Modul. Sei nun α der Leitkoeffizient von h. Dann ist $\mathrm{Koef}(M)$ ein treuer $A[\alpha]$-Modul, der als A-Modul endlich erzeugt ist. Nach der Vorlesung ist α ganz über A. Weil ganze Elemente einen Ring bilden, ist αX^i ganz über R für alle $i \geq 0$. Sei $m \geq 0$ der Grad von h. Dann ist auch $h - \alpha X^m$ ganz über R. Induktion nach dem Grad von h impliziert, dass alle Koeffizienten von h in A liegen, d.h. $h \in A[X] = R$.