Prof. Dr. M. Rapoport
A. Mihatsch

SS 2016

Algebra I

6. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $A = \mathbb{Q}[X, Y]$, und betrachte das Hauptideal $\mathfrak{p} = (X^2 - Y^3)$. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, aber der Integritätsbereich $A/\mathfrak{p}$ nicht ganzabgeschlossen ist.

Aufgabe 2:

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L/K eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Zeige, dass
i) $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in G$.
ii) $B^G = A$.

Aufgabe 3:

Die Gruppe $\mathbb{Z}/3$ operiere auf der k-Algebra $k[X, Y]$ durch Multiplikation mit einer primitiven dritten Einheitswurzel ζ,

$$\mathbb{Z}/3 \ni \bar{\nu} \mapsto (X \mapsto \zeta^\nu X, Y \mapsto \zeta^\nu Y).$$

Berechne den Ring der invarianten Elemente $k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3}$. Versuche diesen Ring durch Erzeuger und Relationen darzustellen. Mit anderen Worten, finde einen Isomorphismus

$$k[X, Y]^{\mathbb{Z}/3} \cong k[Y_1, \ldots, Y_n]/(f_1, \ldots, f_m).$$

Aufgabe 4:

Es sei $f : \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y] \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X, Y]$ die zum Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C}[X, Y] \to \mathbb{C}[X, Y], X \mapsto X, Y \mapsto XY$ gehörige Abbildung. Beschreibe explizit die Fasern $f^{-1}(\mathfrak{m})$ zu den maximalen Idealen der Form $\mathfrak{m} = (X - a, Y - b)$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Interpretiere das Ergebnis geometrisch, also mit Punkten in $\mathbb{C}^2$.

Jede Aufgabe gibt 5 Punkte.

Abgabe: Montag, 30. Mai 2016.