

Algebra II
7. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Bestimme für die folgenden Zahlkörper die Fundamenteinheit und ihre Norm:

- a) $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$,
- b) $\mathbb{Q}(\sqrt{39})$,
- c) $\mathbb{Q}(\sqrt{53})$.

Aufgabe 2:

Sei $p \geq 7$ eine Primzahl der Form $p = 4n - 1$. Zeige, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ genau dann Klassenzahl 1 hat, wenn $m^2 + m + n$ für alle $m \in \{0, 1, \dots, n - 2\}$ eine Primzahl ist.

Tipp: Das Element $\frac{-1+\sqrt{-p}}{2}$ erzeugt den Ring der ganzen Zahlen von K . Was ist sein Minimalpolynom? Zeige nun, dass beide Bedingungen dazu äquivalent sind, dass alle Primzahlen $q < n$ in K träge sind.

Aufgabe 3:

- a) Sei k ein endlicher Körper und $|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Absolutbetrag auf k . Zeige, dass $|x| = 1$ für alle $x \in k^\times$.
- b) Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass es keine archimedischen Absolutbeträge auf k gibt.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper mit einem nicht-archimedischen Absolutbetrag $|\cdot|$. Seien $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$. Zeige, dass $|x + y| = \max(|x|, |y|)$.

Abgabe: Montag, 05. Dezember 2016.