3.11.2005

תרגיל מס׳ 1 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

.1

א. הראו כי לכל מודול M נוצר סופית מעל חוג R יש תת-מודול מקסימלי $N \subset M$ ($N \neq M$).

ב. האם הטענה ב- (א) נכונה עבור מודולים שאינם נוצרים סופית?

.2

א. יהי D חוג המקיים שלכל $0 \neq x \in D$ קיים $y \in D$ עם $xy = 1$. הראו כי D חוג עם חילוק.

ב. תהי D אלגברה ממימד סופי מעל שדה k. הראו כי כל $\alpha \in D$ הוא שורש של פולינום מתוקן $f(x) \in k[x]$.

ג. הסיקו כי אם D אלגברה עם חילוק ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית k, אזי $D = k$.

3. אלגבראות קווטרניונים

א. הראו כי הקבוצה $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C} \right\} \subseteq M_2(\mathbf{C})$ מהווה תת-חוג של $M_2(\mathbf{C})$.

ב. חשבו את המרכז של R.

ג. הוכיחו כי R איזומורפי, כ- $\mathbf{R}$-אלגברה, לאלגברת הקווטרניונים הממשיים $\mathbf{H}$. רשמו במפורש את ההעתקה $R \to R$ המתאימה להעתקה $q \mapsto \bar{q}$ ב- $\mathbf{H}$.

ד. הסיקו מכאן את העובדות שצוינו בכתה, כגון $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$, $q\bar{q} = |q|^2$. הראו מכאן ש- $\mathbf{H}$ חוג עם חילוק.

4. יהיו $n \geq 1$ טבעי ו- p ראשוני. בשאלה זו נלמד את מחלקות הדמיון של מטריצות $A \in GL_n(\mathbf{Q})$ המקיימות $A^p = I$.

הוכיחו כי מספר מחלקות הדמיון הוא $\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + 1$ ותארו נציג לכל מחלקה.

<u>רמז</u>:

א. בנו התאמה בין מחלקות הדמיון לטיפוסי האיזומורפיזם של מודולים M מעל חוג החבורה $R = \mathbf{Q}[\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}]$ עם $\dim_{\mathbf{Q}} M = n$.

ב. תארו את כל המודולים מעל R.